Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 5

Aufgabe 1. Welche der fünf Teilmengen

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x,y,z) \mid x < 0\}, \\ U_2 &= \left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}, \\ U_3 &= \{(x,y,z) \mid 2x + 3y = -z\}, \\ U_4 &= \{(x,y,z) \mid x - y \in \mathbb{Q}\}, \\ U_5 &= \{(t, 3t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

des Anschauungsraumes $V = \mathbb{R}^3$ sind reelle Untervektorräume?

Aufgabe 2. (i) Sei $V = \mathbb{C}[T]$ der Vektorraum aller komplexen Polynome $P(T) = \lambda_n T^n + \ldots + \lambda_0$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$U = \{P \mid P(e^{\pi i/2}T) = P(T) \text{ und } \deg(P) \leqslant 3\}$$

ein Untervektorraum ist.

(ii) Sei $V = \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}$ der Vektorraum aller komplexen Folgen $(z_n)_{n\geq 0}$. Verifizieren Sie, dass die Teilmenge

$$U = \{(z_n)_{n\geq 0} \mid \forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \geq 0 \text{ mit } |z_n| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0\}$$

aller Nullfolgen ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 3. Sei V ein K-Vektorraum und U_1, U_2 zwei Untervektorräume. Beweisen Sie, dass die Vereinigungsmenge $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum ist genau dann, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$.

Aufgabe 4. Wir betrachten den Standardvektorraum $V = K^2$ über einem endlichen Primkörper $K = \mathbb{F}_p$. Wieviele Vektoren $a \in V$ gibt es? Wieviele Geraden $L = Ka$, $a \neq 0$ sind in V vorhanden? Tipp: Verschiedene Vektoren können die gleiche Gerade liefern.

Abgabe: Bis Montag, den 20. November um 10:25 Uhr im Zettelkasten.