Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 21/22

Algebraic Geometry I

Sheet 1

Excercise 1. Verify explicitly that for each ring R the topological space $X = \mathrm{Spec}(R)$ is quasicompact. Give an example where X is not Hausdorff.

Exercise 2. Set $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ and $Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Determine all morphisms $f : X \to Y$ of ringed spaces. Which of them are morphisms of schemes?

Exercise 3. Recall that the ring elements $e \in R$ with $e^2 = e$ are called *idempotent*. Let X be a scheme. Show that

$$e \longmapsto X_e = \{x \in X \mid e(x) \neq 0 \text{ in the residue field } \kappa(a) = \mathscr{O}_{X,a}/\mathfrak{m}_a\}$$

gives a bijection between the set of idempotents in the ring $R = \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ of global sections and the open-and-closed sets $U \subset X$.

Exercise 4. The group $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, which is cyclic of order two, acts on the ring $\mathbb{C}[T]$ by complex conjugation. In turn, we get a G-action on the affine scheme $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T])$. Set $Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[T])$ and consider the canonical morphism

$$f : X \longrightarrow Y$$

corresponding to the inclusion $\mathbb{R}[T] \subset \mathbb{C}[T]$. Prove that for the underlying sets this is the quotient map for the G-action.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 28. Oktober um 23:59 Uhr über ILIAS.

Die Lösungen müssen handschriftlich und individuell sein und in Form einer einzigen pdf-Datei vorliegen, mit der Bezeichnung `NameVorname--Abgabe01.pdf` beim ersten Blatt. Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen vor- und nachbesprochen. Es gibt keine Korrekturen, daher werden auch keine Punkte vergeben.

Quorum: Um zur mündlichen Prüfung zugelassen zu werden, müssen sie insgesamt 8 mathematisch sinnvolle Abgaben gemacht haben.