Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei R ein Ring. Zeigen Sie mit dem Nakayama-Lemma, dass der Ring genau dann ein Körper ist, wenn R ein lokaler noetherscher Ring von Einbettungsdimension

$$\operatorname{edim}(R) = \dim_\kappa(\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2) = 1$$

ist.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring, $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, $R_\mathfrak{p}$ der resultierende lokale Ring, und κ sein Restekörper. Zeigen Sie, dass die $R_\mathfrak{p}$-linearen Homomorphismus

$$\varphi : \kappa \longrightarrow R_\mathfrak{p}$$

den Elementen $a/f \in R_\mathfrak{p}$ entsprechen, welche vom maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ annulliert werden.

Aufgabe 3. Sei R ein noetherscher Ring, und $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r \subset R$ seine minimalen Primideale. Seien $R_i = R_{\mathfrak{p}_i}$ die resultierenden lokalen Ringe, und F_i deren Restekörper. Verifizieren Sie, dass die $\operatorname{Spec}(R_i)$ aus nur einem Punkt bestehen, und dass der Kern des resultierenden Homomorphismus

$$\varphi : R \longrightarrow F_1 \times \ldots \times F_r, \quad f \longmapsto (f/1 \bmod \mathfrak{m}_{R_i}, \ldots, f/1 \bmod \mathfrak{m}_{R_i})$$

das Nilradikal $\operatorname{Nil}(R)$ ist.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring. Zeigen Sie

$$\dim(R) = \sup\{\dim(R_\mathfrak{m})\} = \sup\{\dim(R/\mathfrak{p})\},$$

wobei die Suprema über die maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset R$ beziehungsweise die minimalen Primideale $\mathfrak{p} \subset R$ verlaufen.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 24. Juni um 23:59 Uhr über ILIAS.