Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei $X = \operatorname{Spec}(R)$ das Spektrum eines Ringes. Verifizieren Sie, dass jede endliche Menge $Z = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von abgeschlossenen Punkte $a_i \in X$ die diskrete Topologie trägt.

Aufgabe 2. Sei $\varphi : R \to A$ ein Homomorphismus von Ringen,

$$f : X = \operatorname{Spec}(A) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R) = Y$$

die induzierte stetige Abbildung, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $Z = V(\mathfrak{a})$ die resultierende abgeschlossene Menge in X.

(i) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Bildmenge $f(Z) \subset Y$ im allgemeinen nicht abgeschlossen ist.

(ii) Was ist das Radikalideal $\mathfrak{b} \subset R$ zur abgeschlossenen Menge $\overline{f(Z)} \subset Y$?

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, A ein R-Algebra, und A_λ, $\lambda \in L$ die Familie der Unterringe von der Form $R[a_1, \ldots, a_r] \subset A$, wobei $r \geq 0$ und $a_1, \ldots, a_r \in A$ endlich viele Ringelemente sind. Die Inklusionen $A_\lambda \subset A$ induzieren eine Abbildung

$$\operatorname{Spec}(A) \longrightarrow \prod_{\lambda \in L} \operatorname{Spec}(A_\lambda).$$

Beweisen Sie, dass diese Abbildung eine Einbettung ist.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper. Sei E ein k-Vektorraum und E^* sein Dualraum. Wir bezeichnen mit $T^i(E) = E \otimes \ldots \otimes E$ das i-fache Tensorprodukt, und mit $T^\bullet(E) = \bigoplus_{i \geq 0} T^i(E)$ die *Tensoralgebra*. Der Quotient $\operatorname{Sym}^\bullet(E)$ nach dem zweiseitigem Ideal, das von den Tensoren $u \otimes v - v \otimes u$ zu den Vektoren u, v aus $T^1(E) = E$ erzeugt wird, heißt *symmetrische Algebra*. Zeigen Sie, dass

$$(k\text{-Vec}) \longrightarrow (\text{Top}), \quad E \longmapsto \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}^\bullet(E^*))$$

ein kovarianter Funktor von der Kategorie der k-Vektorräume E in die Kategorie der topologischen Räume X ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 6. Mai um 23:59 Uhr über ILIAS.