Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 12

Aufgabe 1. Seien $f, g \in R[T]$ zwei Polynome vom Grad $m \geq 0$ bzw. $n \geq 0$, sowie $\lambda \in R$. Verifizieren Sie

$$\operatorname{res}(f, g) = (-1)^{mn} \operatorname{res}(g, f) \quad \text{and} \quad \operatorname{res}(\lambda f, g) = \lambda^n \operatorname{res}(f, g).$$

Aufgabe 2. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $a, b \geq 1$ und $R = \mathbb{C}[x]$. Berechnen Sie die Diskriminante $\operatorname{dis}(f) \in R$ für das Polynom

$$f(T) = (T^a - \lambda - x)(T^b - \mu - x),$$

indem Sie das Polynom in einem geeigneten Oberring von R in Linearfaktoren zerlegen.

Aufgabe 3. Berechnen Sie für kubische Polynome der Form $f = T^3 + rT + s$ die Diskriminante

$$\operatorname{dis}(f) = -\operatorname{res}(f, f')$$

als Determinante der 5×5-Matrix $M(f, f')$ aus.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und $f, g \in R[T]$ zwei Polynome. Angenommen, für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ haben die induzierten Polynome

$$\bar{f}, \bar{g} \in \Omega[T]$$

in $\Omega = (R/\mathfrak{m})^{\text{alg}}$ keine gemeinsame Nullstellen. Folgern Sie, dass die Resultante $\operatorname{res}(f, g) \in R$ eine Einheit ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 5. Februar um 23:55 Uhr über ILIAS.