Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei k ein Körper von Charakteristik $p \neq 2$, und $f \in k[T_0, \ldots, T_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad $d = 2$. Zeigen Sie wie zum Fall $k = \mathbb{C}$ aus der Vorlesung, dass es eine Matrix $(\sigma_{ij}) \in \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ mit

$$f(\sum \sigma_{0j} T_j, \ldots, \sum \sigma_{nj} T_j) = \gamma_0 T_0^2 + \ldots + \gamma_n T_n^2$$

gibt, für gewissen Skalare $\gamma_0, \ldots, \gamma_n \in k$.

Aufgabe 2. Wie viele Bahnen hat die kanonische Wirkung von $G = \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ auf dem Untervektorraum $V \subset \mathbb{C}[T_0, \ldots, T_n]$ aller homogenen Polynome vom Grad $d = 2$?

Aufgabe 3. Sei $X = V_+(f)$ die Verschwindungsmenge in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ zu einem homogenen Polynom $f \in \mathbb{C}[T_0, T_1, T_2]$ vom Grad $d = 2$. Angenommen, die partiellen Ableitungen $\partial f / \partial T_i$ haben nur den Ursprung $0 \in \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ als gemeinsame Nullstelle. Zeigen Sie, dass der Schnitt $X \cap L$ mit jeder Geraden

$$L = V_+(\alpha_0 T_0 + \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)$$

aus einem oder zwei Punkten besteht.

Aufgabe 4. Sei $X = V_+(f)$ die Verschwindungsmenge in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ zu einem homogenen Polynom $f \in \mathbb{C}[T_0, T_1, T_2]$ vom Grad $d = 2$. Angenommen, die partiellen Ableitungen $\partial f / \partial T_i$ haben nur den Ursprung $0 \in \mathbb{A}^4(\mathbb{C})$ als gemeinsame Nullstelle. Konstruieren Sie eine Bijektion

$$s : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow X \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C}).$$

Reduzieren Sie dafür das Problem zunächst auf $f = T_0 T_1 - T_2 T_3$.

Abgabe: Bis Freitag, den 22. Januar um 23:55 Uhr über ILIAS.