Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei k ein Körper, $f \in k[T_0, \ldots, T_n]$ ein homogenes Polynom, F_j seien Dehomogenisierung bezüglich der Unbestimmten T_j, und $r \neq j$ ein weiterer Index. Verifizieren sie, dass die partielle Ableitung $\partial F_j / \partial x_r$ die entsprechende Dehomogenisierung von $\partial f / \partial T_r$ ist. Hierbei schreiben wir $x_i = T_i / T_j$.

Aufgabe 2. Sei $f \in \mathbb{C}[T_0, \ldots, T_n]$ ein homogenes Polynom vom Grad $d \geq 2$. Überprüfen Sie, dass die durch die partiellen Ableitungen

$$\partial f / \partial T_1 = \ldots = \partial f / \partial T_n = 0$$

definierte algebraische Menge $Z \subset \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$ den Ursprung $0 \in \mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{C})$ enthält.

Aufgabe 3. Zum homogenen Polynom $f = T_0^2 + T_1 T_2$ betrachten wir die Hyperfläche

$$X = V_+(f) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, dass auf den Karten $U_j = D_+(T_j)$ diese Hyperfläche zu Kopien von $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ oder $\mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ wird.

Aufgabe 4. Wir betrachten nun zum homogenen Polynom $g = T_1^2 + T_2^2$ die Hyperfläche

$$Y = V_+(g) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}).$$

Beweisen Sie, dass der topologische Raum Y die Vereinigung von zwei Kopien der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = S^2$ ist, die sich in einem Punkt berühren.

Abgabe: Bis Freitag, den 15. Januar um 23:55 Uhr über ILIAS.