Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei k ein Körper und $k(t)$ der Körper der rationalen Funktionen. Wir betrachten das Element

$$x = \frac{t}{t^2+1} + \frac{t^3-1}{t}.$$

Verifizieren Sie explizit, dass $x \in k(t)$ transzendent über k ist, und bestimmen Sie den Grad der endlichen Körpererweiterung $k(x) \subset k(t)$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die j-Invarianten für die komplexen Strukturen auf dem Torus $X = T^2$, welche durch die folgenden beiden Gleichungen gegeben werden:

$$y^2 = x^3 + 2x^2 - 3x \quad \text{and} \quad y^2 = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (\lambda_0 : \lambda_1) \longmapsto (\lambda_0^2 : \lambda_0\lambda_1 : \lambda_1^2)$$

eine wohldefinierte holomorphe Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten liefert, indem Sie f vermöge der Karten als Abbildungen zwischen offenen Mengen in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^2$ deuten.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Wirkung der Gruppe $G = \mathbb{C}^\times$ auf der komplexen 2-Mannigfaltigkeit $X = \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\}$, welche durch die Formel

$$\alpha \cdot (\lambda_0, \lambda_1) = (\alpha^{-1}\lambda_0, \alpha\lambda_1)$$

gegeben ist. Beweisen Sie, dass der Bahnenraum X/G versehen mit der Quotiententopologie nicht hausdorffsch ist. Verdeutlichen Sie dies mit einer Skizze des reellen Bildes.

Abgabe: Bis Freitag, den 8. Januar um 23:55 Uhr über ILIAS.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!