Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei $f : X \to Y$ eine verzweigte Überlagerung vom Grad $n \geq 1$, wobei $X = S^2$ die 2-Sphäre und Y eine andere 2-Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie mit der Riemann–Hurwitz-Formel, dass $Y = S^2$ oder $Y = P^2$ gelten muss.

Aufgabe 2. Sei X eine kompakte orientierbare 2-Mannigfaltigkeit, und

$$f : X \longrightarrow Y$$

eine verzweigte Überlagerung von $Y = S^2$ vom Grad $n = 2$. Welche Beziehung zwischen der Anzahl $r \geq 0$ der Verzweigungspunkte von f und dem Geschlecht $g \geq 0$ von X liefert die Riemann–Hurwitz-Formel?

Aufgabe 3. Sei Y und X orientierbare, zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht g beziehungsweise $g + 1$. Angenommen, es gibt eine verzweigte Überlagerung $f : X \to Y$ vom Grad $n \geq 1$, mit $r \geq 0$ Verzweigungspunkte. Folgern sie mit der Riemann–Hurwitz-Formel, dass dann

$$Y = S^2, \quad Y = T^2, \quad \text{oder} \quad Y = T^2 \sharp T^2$$

gelten muss. Deduzieren Sie für den dritten Fall weiterhin $n = 2$ und $r = 0$.

Aufgabe 4. Sei $f : X \to Y$ eine verzweigte Überlagerung mit kompakten 2-Mannigfaltigkeiten X und Y. Angenommen, Y ist orientierbar. Beweisen Sie, dass dann auch X orientierbar ist, indem sie Triangulierungen von Y baryzentrisch unterteilen und damit eine Triangulierung von X gewinnen.

Abgabe: Bis Freitag, den 18. Dezember um 23:55 Uhr über ILIAS.