Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 6

Aufgabe 1. Wir betrachten die algebraische Menge

$$X : x^m - y^n = 0$$

zu relative primen Exponenten $m, n \geq 2$. Verifizieren Sie, dass $\mathrm{Sing}(X) \neq \varnothing$, und dass X trotzdem eine topologische 2-Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass die algebraische Menge $X : x^2 - y^2 = 0$ am Ursprung $a = (0, 0)$ keine topologische 2-Mannigfaltigkeit ist, indem Sie die Zusammenhangs-Eigenschaften von punktierten Umgebungen $U \smallsetminus \{a\}$ betrachten.

Aufgabe 3. Die *Kleinsche Flasche* ist die kompakte zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit X zum Flächenwort $aba^{-1}b$.

(i) Berechnen Sie die Euler-Charakteristik $e(X)$ mittels Zellenzerlegung.

(ii) Bringen Sie $aba^{-1}b$ durch die in der Vorlesung angegebenen Umwandlungen in die Normalform x^2y^2.

(iii) Fertigen Sie im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ ein Bild von $X = P^2 \sharp P^2$ mit Selbstdurchdringung an.

Aufgabe 4. Sei $X : f(x, y) = 0$ eine ebene Kurve im $\mathbb{C}^2$ mit

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad f'(0, 0) \neq 0,$$

wobei wir $f' = \partial f / \partial y$ schreiben. Zeigen Sie mit dem Residuensatz, dass das Wegintegral

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\beta| = \epsilon} (\beta f'(\alpha, \beta) / f(\alpha, \beta))\, d\beta$$

für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ und $|\alpha|$ der impliziten Gleichung $f(\alpha, \psi(\alpha)) = 0$ genügt.

Abgabe: Bis Freitag, den 11. Dezember um 23:55 Uhr über ILIAS.