Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei $f \in \mathbb{C}[x, y]$ ein Quadrat-freies Polynom, mit irreduziblen Faktoren f_i, $1 \leq i \leq r$. Seien $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ die resultierenden ebenen Kurven im $\mathbb{C}^2$. Verifizieren Sie, dass

$$X_i \cap X_j \subset \mathrm{Sing}(X)$$

für alle $i \neq j$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie für die ebenen Kurven $X : f(x, y) = 0$ den singulären Ort $\mathrm{Sing}(X) \subset \mathbb{C}^2$, mit folgenden Polynomen $f(x, y)$:

$$x^2 + y^3, \quad x - xy^5, \quad x^2y^3 - x^3 - y^4 + xy.$$

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass jede algebraische Menge $Z \subsetneq \mathbb{C}^2$ die Vereinigung von endlich vielen ebenen Kurven $X_1, \ldots, X_r$ zu irreduziblen Polynomen und endlich vielen Punkten $a_1, \ldots, a_s$ ist.

Aufgabe 4. Eine Menge $U \subset \mathbb{C}^2$ nennt man *Zariski-offen*, wenn ihr Komplement $Z = \mathbb{C}^2 \smallsetminus U$ algebraisch ist.

(i) Zeigen Sie mit der vorangegangenen Aufgabe, dass die Kollektion aller Zariski-offenen Mengen U eine Topologie auf der Menge $\mathbb{C}^2$ bilden.

(ii) Verifizieren Sie, dass der resultierende topologische Raum $\mathbb{A}^2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2$ quasikompakt aber nicht haussdorfsch ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 4. Dezember um 23:55 Uhr über ILIAS.