Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei R ein Ring, und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal mit der Eigenschaft $\mathfrak{a}^2 = 0$. Zeigen Sie, dass der Kern der zwischen den multiplikativen Gruppen induzierten Abbildung $R^\times \to (R/\mathfrak{a})^\times$ die Menge

$$1 + \mathfrak{a} = \{1 + f \mid f \in \mathfrak{a}\}$$

ist, und das dies als abelsche Gruppe isomorph zum Kern $\mathfrak{a}$ der Restklassenabbildung $R \to R/\mathfrak{a}$ ist.

Aufgabe 2. Verifizieren Sie die Identität

$$\sum_{i+j=n} \binom{r}{i}\binom{r}{j} = \binom{2r}{n}$$

für beliebige Elemente r einer $\mathbb{Q}$-Algebra R, indem Sie beide Seiten als Polynome in r mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ deuten und deren Nullstellen betrachten. Deduzieren Sie daraus

$$(1+x)^{1/2} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/2}{i} x^i$$

im Ring der formalen Potenzreihen $\mathbb{Q}[[x]]$, indem Sie das Quadrat der rechten Seite berechnen.

Aufgabe 3. Wir betrachten den Körper $F = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{C}((x^{1/n}))$ der formalen Puiseux-Reihen

$$f(x) = \sum_{i \geq -m} \lambda_i x^{i/n}, \quad \text{wobei } m \geq 0 \text{ und } n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass jedes Polynom der Form $T^d - f(x)$ aus $F[T]$ in Linearfaktoren zerfällt. Folgern Sie mit der Galois-Korrespondenz, dass es keine abelschen Erweiterungen $F \subset E$ vom endlichen Grad $d > 1$ gibt.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper und x eine Unbestimmte. Eine formalen Ausdruck der Form

$$f(x) = \sum_{r \in \mathbb{R}} \lambda_r x^r$$

nennte man eine *Hahn-Reihe*, falls der Träger $\mathrm{Supp}(f) = \{r \in \mathbb{R} \mid \lambda_r \neq 0\}$ *wohlgeordnet* ist, also jede nicht-leere Teilmenge ein kleinstes Element enthält. Beweisen Sie, dass die Cauchy-Multiplikation für Hahn-Reihen wohldefiniert ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 20. November um 23:55 Uhr über ILIAS.