Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $X : f(x,y) = 0$ die ebene Kurve zu einem nicht-konstantem komplexen Polynom $f \in \mathbb{C}[x,y]$. Zeigen Sie, dass die algebraische Menge $X \subset \mathbb{C}^2$ nicht beschränkt ist, und nach dem Satz von Heine–Borel also nicht kompakt sein kann.

Aufgabe 2. Wir betrachten die ebene Kurve $X : y^n = f(x)$, wobei $f \in \mathbb{C}[x]$ ein separables Polynom vom Grad $d = 3$ ist. Zeigen Sie, dass eine Substitution

$$x = u^n x' + r \quad \text{und} \quad y = u^3 y'$$

mit geeigneten $u \in \mathbb{C}^\times$ und $r \in \mathbb{C}$ die algebraische Menge $X \subset \mathbb{C}^2$ in die algebraische Menge $Y : y^2 = x(x-1)(x-\tau)$ überführt wird, für eine komplexe Zahl $\tau \neq 0, 1$.

Aufgabe 3. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl, $f \in \mathbb{C}[x]$ separabel vom Grad $r \geq 1$, und $X : y^n = f(x)$ die resultierende ebene Kurve $X \subset \mathbb{C}^2$.

(i) Verifizieren Sie mit dem Eisenstein-Kriterium, dass $g(x,y) = y^n - f(x)$ im Ring $R = \mathbb{C}[x,y]$ irreduzibel ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $g(x,y)$ im Ring $A = \mathbb{C}[[x]][y]$ reduzibel wird genau dann, wenn $f(x)$ keine Nullstelle bei $x = 0$ hat.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper und V ein k-Vektorraum. Wir definieren auf der Gruppe $R = k \oplus V$ die Multiplikation

$$(\lambda, v) \cdot (\mu, w) = (\lambda\mu, \lambda w + \mu v).$$

Verifizieren Sie, dass dies eine Ringstruktur liefert, indem Sie R als Restklassenring eines Polynomrings $k[T_i]_{i \in I}$ deuten. Zeigen Sie weiterhin, dass R noethersch ist genau dann, wenn $\dim_k(V) < \infty$.

Abgabe: Bis Freitag, den 13. November um 23:55 Uhr über ILIAS.