Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 20/21

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $f(x,y)$ ein nicht-konstantes komplexes Polynom. Verifizieren mit dem Fundamentalsatz der Algebra, dass die resultierende algebraische Menge $X \subset \mathbb{C}^2$ nicht-leer ist.

Aufgabe 2. Sei $m \geq 1$. Wir fassen den Matrizenraum $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$ als Standardvektorraum $\mathbb{C}^{m^2}$ auf. Entscheiden Sie mithilfe des charakteristischen Polynoms sowie von Minoren, welche der folgenden Mengen algebraisch sind:

(i) Die Menge der invertierbaren Matrizen.

(ii) Die Menge der nilpotenten Matrizen.

(iii) Die Menge der Matrizen vom Rang $r \leq 2$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die kleinste algebraische Menge $X \subset \mathbb{C}^2$, welche alle Punkte $a = (m,n)$ mit Koordinaten $m, n \in \mathbb{Z}$ enthält, bereits $X = \mathbb{C}^2$ ist.

Aufgabe 4. Sei $f_i(T_1, \ldots, T_n)$, $i \in I$ eine Familie von reellen Polynomen, und $X \subset \mathbb{R}^n$ die Menge aller Punkte, an denen all diese Polynome verschwinden. Beweisen Sie, dass X auch als Verschwindungsmenge eines einzigen Polynoms

$$g(T_1, \ldots, T_n) \in \mathbb{R}[T_1, \ldots, T_n]$$

gedeutet werden kann. Tipp: Benutzen Sie Hilberts Basissatz sowie Quadrate.

Abgabe: Bis Freitag, den 6. November um 23:59 Uhr über ILIAS.

Die Lösungen müssen handschriftlich und individuell sein und in Form einer einzigen pdf-Datei vorliegen, mit der Bezeichnung `NameVorname--Abgabe01.pdf` beim ersten Blatt. Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen vor- und nachbesprochen. Es gibt keine Korrekturen, daher werden auch keine Punkte vergeben.

Quorum: Um zur mündlichen Prüfung zugelassen zu werden, müssen sie insgesamt 8 mathematisch sinnvolle Abgaben gemacht haben.