Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer
SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 11

Aufgabe 1. Seien p, q, r paarweise verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass jede Gruppe G von Ordnung $n = pqr$ auflösbar ist.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe, und $D(G)$ die von den Kommutatoren

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} \in G$$

erzeugte Untergruppe, wobei x, y über alle Gruppenelemente verläuft. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Untergruppe $D(G) \subset G$ ist normal.

(ii) Die Restklassengruppe $G^{\text{ab}} = G/D(G)$ ist abelsch.

(iii) Die Gruppe G ist auflösbar genau dann, wenn $D(G)$ auflösbar ist.

(vi) Für die symmetrische Gruppe gilt $D(S_n) = A_n$.

Aufgabe 3. Sei $p > 0$ eine Primzahl und $r \geq 1$. Zeigen Sie, dass die endliche Erweiterung $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^r}$ galoisch ist, mit Galois-Gruppe

$$\text{Gal}(\mathbb{F}_{p^r}/\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 4. Nach dem Zwischenwertsatz bzw. der Darstelllung mit Polarkoordinaten haben die Körper $K = \mathbb{R}$ und $L = \mathbb{C}$ die folgenden Eigenschaften: Der Erweiterungsgrad ist $[L : K] = 2$, und es gibt keine $K \subset K'$ oder $L \subset L'$ mit

$$[K' : K] = 2n + 3 \quad \text{und} \quad [L' : L] = 2.$$

Zeigen Sie für derartige Körper $K \subset L$ in Charakteristik $p = 0$, dass L algebraisch abgeschlossen sein muss. Argumentieren Sie wie folgt:

(i) Wäre $L \subsetneqq L^{\text{alg}}$, so gibt eine endliche Erweiterung $L \subsetneqq E$.

(ii) Ein derartiges E lässt sich so wählen, dass $K \subset E$ galoisch ist.

(iii) Aus den Sylow-Sätzen und der Galois-Korrespondenz folgt, dass $G = \text{Gal}(E/K)$ eine 2-Gruppe ist.

(iv) Daraus ergibt sich eine quadratische Erweiterung $L \subset L'$, Widerspruch!

Abgabe: Bis Mittwoch, den 8. Juli um 8:25 Uhr über ILIAS.

Klausurzulassung: Aufgrund der besonderen Umstände im Corona-Semester wird das Quorum auf $80 = 10 \cdot 20 \cdot 0,4$ Punkte abgesenkt.