Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{Q} \subset E$ der Zerfällungskörper eines irreduzibles Polynoms $f \in \mathbb{Q}[T]$ vom Grad $\deg(f) = 3$, das eine komplexe Wurzel $\omega \in \mathbb{C}$ hat, also $\operatorname{Im}(\omega) \neq 0$. Bestimmen Sie mit der Galois-Korrespondenz die Anzahl der Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset L \subset E$.

Aufgabe 2. Sei $K \subset E$ der Zerfällungskörper zu einem Polynom $f = T^n - \alpha$ mit $\alpha, n \in K^\times$, und $K \subset L$ der Zerfällungskörper zu $g = T^n - 1$, aufgefasst als Zwischenkörper. Verifizieren Sie, dass der Homomorphismus

$$\operatorname{Gal}(L/K) \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mu_n(L)), \quad \sigma \longmapsto (\xi \mapsto \sigma(\xi))$$

injektiv ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Abbildungen

$$\operatorname{Gal}(E/L) \longrightarrow \mu_n(L), \quad \sigma \longmapsto \sigma(\sqrt[n]{\alpha})/\sqrt[n]{\alpha}$$

ein injektiver Homomorphismus ist, der nicht von der Wahl der Wurzel $\sqrt[n]{\alpha}$ abhängt.

Aufgabe 3. Sei $K \subset E$ eine Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe $G = \operatorname{Gal}(E/K)$. Rechnen Sie nach, dass

$$\operatorname{Gal}(E/\sigma(L)) = \sigma \operatorname{Gal}(E/L)\sigma^{-1}$$

für jeden Zwischenkörper L und jedes $\sigma \in G$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $K \subset E$ eine Galois-Erweiterung vom Grad $[E : K] = p^n$, für eine Primzahl $p > 0$. Zeigen Sie mit der Galois-Korrespondenz, dass es eine Folge von Unterkörpern

$$K = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = E$$

mit $[L_i : K] = p^i$ gibt.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 1. Juli um 8:25 Uhr über ILIAS.