Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer
SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei K ein Körper. Wir rechnen hier in der Erweiterung $E = K(\omega_1, \omega_2)$, wobei ω_1, ω_2 zwei Unbestimmte sind, und setzen $\omega_3 = -(\omega_1 + \omega_2)$. Seien $r, s \in E$ die Koeffizienten des Polynoms

$$f = (T - \omega_1)(T - \omega_2)(T - \omega_3) = T^3 + rT + s.$$

Verifizieren Sie durch explizites Nachrechnen die Gleichheit

$$(\omega_1 - \omega_2)^2(\omega_1 - \omega_3)^2(\omega_2 - \omega_3)^2 = -(4r^3 + 27s^2)$$

für die Diskriminante $\mathrm{dis}(f) \in E$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix, und

$$L = K[A] \subset \mathrm{Mat}_n(K)$$

die von A erzeugte K-Algebra. Angenommen, es gibt keinen A-invarianten Unterraum $0 \subsetneq U \subsetneq K^n$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Der Ring L ist ein Körper, vom Grad $[L : K] = n$.

(ii) Die Erweiterung $K \subset L$ ist separabel genau dann, wenn die Matrix A halbeinfach ist, also über $\Omega = K^{\mathrm{alg}}$ diagonalisierbar wird.

Aufgabe 3. Sei $\omega \in \mathbb{C}$ eine algebraische Zahl, und $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ die entsprechende Erweiterung.

(i) Angenommen, $\mathbb{Q} \subset E$ ist normal. Verifizieren Sie, dass die komplexe Konjugation $\overline{x + iy} = x - iy$ einen $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $\sigma : E \to E$ induziert.

(ii) Geben Sie ein Beispiel $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ an, bei dem dies nicht der Fall ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper von Charakteristik $p > 0$, aufgefasst als Erweiterung des Primkörpers $\mathbb{F}_p$.

(i) Verifizieren Sie, dass die *Frobenius-Abbildung*

$$F : K \longrightarrow K, \quad x \longmapsto x^p$$

eine $\mathbb{F}_p$-Homomorphismus ist.

(ii) Angenommen, der Frobenius $F : K \to K$ ist surjektiv. Beweisen Sie, dass jede algebraische Erweiterung $K \subset E$ separabel ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 24. Juni um 8:25 Uhr über ILIAS.