Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei $K = \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}^{\text{alg}}$ der Körper der reellen algebraischen Zahlen. Beweisen Sie, dass für jede endliche Erweiterung $L = K(\alpha)$ mit $\alpha \notin K$ der Grad $n = [L : K]$ eine gerade Zahl ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{C}$ unendlich viele algebraisch abgeschlossenen Unterkörper enthält.

Aufgabe 3. Wir betrachten den endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ zur Primzahlpotenz $q = p^n$.

(i) Für welche Exponenten n gibt es genau vier Unterkörper $K \subset \mathbb{F}_q$?

(ii) Für welche n ist die Menge der Unterkörper $L \subset \mathbb{F}_q$ total geordnet?

Aufgabe 4. Sei $K \subset \mathbb{R}$ ein Unterkörper. Angenommen, der Punkt $z = (\omega_1, \omega_2)$ aus $\mathbb{R}^2$ geht durch eine elementare ZL-Konstruktion mit zwei Kreisen aus Punkten mit Koordinaten in K hervor. Rechnen Sie explizit nach, dass

$$[K(\omega_1, \omega_2) : K] = 2^\nu$$

für $\nu = 1$ oder $\nu = 0$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 17. Juni um 8:25 Uhr über ILIAS.