Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, $f = \lambda_2 T^2 + \lambda_1 T + \lambda_0$ ein irreduzibles quadratisches Polynom und $L = K[T]/(f)$ die entsprechende Körpererweiterung. Berechnen Sie zu jedem $a \in L$ die Spur und Determinante der K-linearen Abbildung

$$L \longrightarrow L, \quad x \longmapsto ax.$$

Bestimmen Sie damit das Minimalpolynom von $a \in L$.

Aufgabe 2. (i) Verifizieren Sie, dass das Polynom $f = T^4 + 5T^2 + 2$ aus $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel ist.

(ii) Sei $L = \mathbb{Q}[T]/(f)$ die resultierende Körpererweiterung und $\omega \in L$ die Restklasse der Unbestimmten. Stellen Sie das Produkt

$$(\omega^4 - 4\omega^3 + \omega) \cdot (\omega^2 + 1)$$

als Linearkombination der Basisvektoren ω^i, $0 \leq i \leq 3$ dar.

Aufgabe 3. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ zwei algebraische Zahlen und $f \in \mathbb{Q}[T]$ das Minimalpolynom von $\alpha + \beta$. Wir betrachten die endliche $\mathbb{Q}$-Algebra $A = \mathbb{Q}(\alpha) \otimes \mathbb{Q}(\beta)$ und den $\mathbb{Q}$-linearen Endomorphismus

$$h : A \longrightarrow A, \quad x \longmapsto (\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \beta)x.$$

(i) Zeigen Sie, daß $f(T)$ ein Teiler des charakteristischen Polynoms $\chi_h(T)$ ist.

(ii) Folgern Sie daraus die Abschätzung $\deg(\alpha + \beta) \leq \deg(\alpha)\deg(\beta)$.

(iii) Berechne Sie damit das Minimalpolynom der Summe $\sqrt{2} + e^{2\pi i/3}$.

Aufgabe 4. Sei $K \subset E$ eine algebraische Körpererweiterung. Beweisen Sie, dass jeder Homomorphism $\varphi : E \to E$ von K-Algebren bijektiv sein muss.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 10. Juni um 8:25 Uhr über ILIAS.