Mathematisches Institut SS20
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zur Algebra

Blatt 6

Aufgabe 1. Verifizieren Sie die Irreduzibilität der folgenden Polynome:

(i) $f(T) = T^3 + 2T^2 + 4T - 1$ im Ring $\mathbb{F}_5[T]$.

(ii) $g(X,T) = T^m + X^n - 1$ mit Exponenten $m, n \geq 1$ im Ring $\mathbb{Q}[X,T]$.

(iii) $h(T) = T^3 + 662T + 34$ im Ring $\mathbb{Q}[T]$.

(iv) $u(T) = T^{200} - 133T^{17} + 588X^9 + 728$ im Ring $\mathbb{Q}[T]$.

(v) $v(T) = T^p - T + 1$ für Primzahlen $p > 0$ im Ring $\mathbb{Q}[T]$. Nutzen Sie dabei die Kongruenz $v(T+1) \equiv v(T)$ modulo p.

Aufgabe 2. Sei $p > 0$ prim und $d \geq 0$. Wir betrachten den Untervektorraum $V \subset \mathbb{F}_p[T]$ aller Polynome vom Grad $\leq d$, versehen mit dem Ableitungsoperator

$$f : V \longrightarrow V, \quad T^i \longmapsto iT^{i-1}.$$

Bestimmen Sie die invarianten Faktoren $\chi_r \mid \chi_{r-1} \mid \ldots \mid \chi_1$ von (V, f) als Modul über dem Ring $R = \mathbb{F}_p[T]$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und V ein beliebiger Vektorraum, etwa $K = \mathbb{Q}$ und $V = \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß es eine Basis gibt, indem Sie das Lemma von Zorn auf die geordnete Menge Ψ aller linear unabhängigen Teilmengen in V anwenden.

Aufgabe 4. Klassifizieren Sie die abelschen Gruppen G von Ordnung $n = |G|$ für die Werte

$$624 \leq n \leq 627,$$

indem sie die möglichen invariante Faktoren $n_r \mid n_{r-1} \mid \ldots \mid n_1$ bestimmen.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 3. Juni um 8:25 Uhr über ILIAS.