Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ zwei Ideale. Verifizieren Sie, dass die folgenden Teilmengen ebenfalls Ideale sind:

(i) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{\sum a_i b_i \mid a_i \in \mathfrak{a} \text{ und } b_i \in \mathfrak{b}\}$

(ii) $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \{f \in R \mid f\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\}$

(iii) $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{g \in R \mid g^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n \geq 0\}$

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, $A = K[T]$ der Polynomring, und $R = K[T^2, T^3]$ der Unterring, der aus allen Polynomen $f = \sum \lambda_i T^i$ mit $\lambda_1 = 0$ besteht. Verifizieren Sie, dass R integer ist, aber das Element $f = T^2$ keine Primfaktorzerlegung besitzt.

Aufgabe 3. Sei $R = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zu jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$\mathfrak{m}_a = \{f \in R \mid f(a) = 0\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Der Ring R ist nicht integer.

(ii) Die Teilmengen $\mathfrak{m}_a \subset R$ sind maximale Ideale.

(iii) Gilt $\mathfrak{m}_a = \mathfrak{m}_b$ so müssen die Punkte $a, b \in \mathbb{R}$ übereinstimmen.

(iv) Es gibt maximale Ideale $\mathfrak{m} \subset R$, die nicht von obigen Form sind.

Aufgabe 4. Sei R ein faktorieller Ring und $F = \operatorname{Frac}(R)$ der Körper seiner Brüche. Sei $p \in R$ ein Primelement, $S = R \smallsetminus (p)$ das Komplement des resultierenden Primideals, und

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{f}{g} \mid f \in R \text{ und } g \in S \right\} \subset F$$

(i) Verifizieren Sie, dass die Teilmenge $S \subset R$ ein Untermonoid bezüglich der Multiplikation ist.

(ii) Rechnen Sie nach, dass die Teilmenge $S^{-1}R \subset F$ ein Unterring ist.

(iii) Beweisen Sie, dass $S^{-1}R$ ein Hauptidealring ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 27. Mai um 8:25 Uhr über ILIAS.