Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei G eine endliche Gruppe, $H \subset G$ eine p-Gruppe und $H' \subset G$ eine p-Sylow-Gruppe. Argumentieren Sie wie im Beweis der Sylow-Sätze, daß H in einer konjugierten Untergruppe $bH'b^{-1}$ enthalten ist.

Aufgabe 2. Sei $p > 0$ eine Primzahl und $n < p^2$.

(i) Berechnen Sie die Ordnung der p-Sylow-Gruppen $H \subset S_n$.

(ii) Zeigen Sie, dass H elementar-abelsch ist, und geben Sie eine $\mathbb{F}_p$-Basis an.

(iii) Bestimmen Sie die Ordnung der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(H)$.

Aufgabe 3. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorraum. Konstruieren Sie eine injektive Abbildung $(V_i)_{0\leq i\leq n} \mapsto H$, welcher jeder *Fahne*

$$0 = V_0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq V_n = V.$$

von Untervektorräumen eine p-Sylow-Gruppe $H \subset \mathrm{GL}(V)$ zuordnet. Betrachten Sie dann die Anzahl der Fahnen $r \geq 0$ bzw. p-Sylow-Gruppen $s_p = [G : N_G(H)]$ und folgern Sie, dass obige Abbildung bijektiv sein muss.

Aufgabe 4. Sei G eine einfache Gruppe von Ordnung $n = 60$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Menge $Y = \mathrm{Syl}_5(G)$ besteht aus sechs Elementen.

(ii) Die zur Konjugationswirkung auf Y gehörende Abbildung $G \to S_6$ gibt eine Inklusion $G \subset A_6$.

(iii) Der Bahnenraum A_6/G hat sechs Elemente, und die Nebenklasse eG ist Fixpunkt bezüglich der Translationswirkung.

(iv) Die zur G-Menge $X = A_6/G \smallsetminus \{eG\}$ gehörende Abbildung $G \to S_5$ liefert eine Identifizierung $G = A_5$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 20. Mai um 8:25 Uhr über ILIAS.