Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 3

Aufgabe 1. Wir betrachten die kanonische Wirkung der Matrizengruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ auf der Menge $X \subset \mathbb{F}_2^{\oplus 2}$ der nicht-trivialen Vektoren. Verifizieren Sie, dass der entsprechende Homomorphismus

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \longrightarrow S_X, \quad A \longmapsto (x \mapsto Ax)$$

bijektiv ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $A \neq E$ trigonalisierbar ist genau dann, wenn die entsprechende Permutation $\sigma \neq e$ eine Transposition ist.

Aufgabe 2. Gegeben sei eine Erweiterung von Gruppen

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow 1.$$

Angenommen, der surjektive Homomorphismus $p : G \to H$ erlaubt einen Schnitt $s : H \to G$. Folgern Sie, dass die kanonischen Abbildung

$$f : N \rtimes_\varphi H \longrightarrow G, \quad (x, a) \longmapsto i(x)s(a)$$

ein Isomorphismus von Gruppen ist. Hierbei ist $\varphi_a(x) = s(a)xs(a)^{-1}$ die Konjugationswirkung.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Wir fassen den Quotienten $X = G/H$ als G-Menge durch die Translationswirkung $a \cdot bH = abH$ auf, und schreiben $f : G \to S_X$ für den entsprechenden Homomorphismus.

(i) Beweisen Sie, dass $N = \mathrm{Ker}(f)$ der größte Normalteiler in G ist, welcher in H enthalten ist.

(ii) Folgern Sie daraus, dass jede Untergruppe H vom Index $[G : H] = 2$ normal sein muss.

Aufgabe 4. Die *projektive spezielle Gruppe* ist der Quotient

$$\mathrm{PSL}_n(K) = \mathrm{SL}_n(K)/N \quad \text{wobei} \quad N = \{\lambda E \mid \lambda^n = 1\}.$$

Zeigen Sie $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$, indem Sie die Matrizengruppe auf der Menge aller Geraden $L \subset \mathbb{F}_3^{\oplus 2}$ wirken lassen.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 13. Mai um 8:25 Uhr über ILIAS.