

Übungen zur Algebra

Blatt 2

Aufgabe 1. Wir betrachten die Gruppe $G = \text{GL}_2(\mathbb{F}_5)$. Welche der folgenden Teilmengen $H \subset G$ sind Untergruppen? Welche davon sind Normalteiler?

- (i) Die Teilmenge der Skalarmatrizen.
- (ii) Die Teilmenge der Diagonalmatrizen.
- (iii) Die Teilmenge der symmetrischen Matrizen.
- (iv) Die Teilmenge der oberen Dreiecksmatrizen.
- (v) Die Teilmenge der trigonalisierbaren Matrizen.

Aufgabe 2. Berechnen Sie das Zentrum $Z(D_n)$ der dihedralen Gruppe $D_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \{\pm 1\}$ für $n \geq 3$. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $n = 2m$ gerade und $n = 2m + 1$ ungerade.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe und $\text{Aut}(G)$ ihre Automorphismengruppe. Zu $a \in G$ betrachten wir die durch Konjugation gegebene Abbildung

$$\gamma_a : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto axa^{-1}.$$

Verifizieren Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Die γ_a sind Automorphismen von G .
- (ii) Die Abbildung $\gamma : G \rightarrow \text{Aut}(G)$, $a \mapsto \gamma_a$ ist ein Homomorphismus.
- (iii) Der Kern von γ ist das Zentrum von G .
- (iv) Das Bild $\gamma(G) \subset \text{Aut}(G)$ ist ein Normalteiler.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Gruppe $G = \text{GL}_2(\mathbb{F}_3)$.

- (i) Welche $d = \text{ord}(A)$, $A \in G$ sind nach dem Satz von Lagrange möglich?
- (ii) Welche treten für trigonalisierbare $A \in G$ auf?
- (iii) Welche für nicht-trigonalisierbare $B \in G$?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 6. Mai um 8:25 Uhr über ILIAS.

Schriftliche Prüfung: Die erste Klausur ist für Samstag, den 18. Juli für 8:30–10:30 geplant. Die Anmeldefrist endet am 11. Juli. Angemeldete Studierende, welche die Zulassungsvoraussetzungen nicht erfüllen, gelten als abgemeldet. Insbesondere Wiederholer, die in der Vergangenheit die Zulassungsvoraussetzung erreicht haben, müssen rechtzeitig sicherstellen, dass in unserer Liste die Anmeldung sowie die Erfüllung der Zulassungsvoraussetzung erfasst wurden.