

Übungen zur Algebra

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $G = \{e, a, b\}$ eine Gruppe von Ordnung $|G| = 3$.

- (i) Deduzieren Sie aus den Gruppenaxiomen, dass $a^2 = b$ gilt.
- (ii) Folgern Sie, dass alle Gruppen von Ordnung drei isomorph sind.
- (iii) Berechnen sie die Automorphismengruppe $\Gamma = \text{Aut}(G)$.

Aufgabe 2. Sei $G = \{e, a, b, c\}$ eine Gruppe von Ordnung $|G| = 4$.

- (i) Verifizieren Sie, dass man nach Umbenennung der Elemente

$$a^2 \neq c \quad \text{und} \quad \text{ord}(a) \geq \text{ord}(b), \text{ord}(c)$$

zusätzlich annehmen kann.

- (ii) Zeigen Sie, dass entweder $a^2 = e$ oder $a^2 = b$ gilt, und dass beide Fälle auftreten können.
- (iii) Folgern Sie, dass es genau zwei Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung vier gibt.
- (iv) Was sind deren Automorphismengruppen $\Gamma = \text{Aut}(G)$?

Aufgabe 3. Sei $f : G \rightarrow H$ eine Abbildung zwischen zwei Gruppen. Zeigen Sie, dass f ein Homomorphismus ist genau dann, wenn der Graph $\Gamma_f \subset G \times H$ eine Untergruppe ist.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe,

$$\mu : G \times G \longrightarrow G, \quad (a, b) \longmapsto ab \quad \text{und} \quad \iota : G \longrightarrow G, \quad a \longmapsto a^{-1}$$

das Gruppengesetz beziehungsweise die Inversenabbildung. Beweisen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

- (i) Die Gruppe G ist kommutativ.
- (ii) Die Abbildung μ ist ein Homomorphismus.
- (iii) Die Abbildung ι ist ein Homomorphismus.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 29. April um 8:25 Uhr über ILIAS.

Prozedur für virtuelle Lehre: Bis auf weiteres erfolgen die Abgaben über die Lernplattform ILIAS, bei der Sie sich mit ihrer HHU-Kennung einloggen. Die Abgaben müssen handschriftlich und individuell sein und in Form einer einzigen pdf-Datei vorliegen, mit folgender Bezeichnung beim ersten Blatt:

NameVorname--Abgabe01.pdf

Sie können z.B. Ihre aufgeschriebenen Lösungen mit Smartphone abphotographieren und von jpg in pdf umwandeln, unter Linux etwa mit dem Befehl `convert *.jpg NameVorname--Abgabe01.pdf`. Die Abgabe erfolgt auf ILIAS beim *Kurs Algebra* in ihrer *Gruppe* unter *Abgaben*. Dort werden Sie dann auch die Korrektur als NameVorname--Korrektur01.pdf finden.

Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:

- (i) Beschäftigen Sie sich *ab dem Ausgabetag* mit den Übungsaufgaben.
- (ii) Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.
- (iii) *Diskutieren* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben.
- (iv) Schreiben Sie Ihre Lösungen in *vollständigen und korrekten deutschen Sätzen* auf! Die Verwendung von logischen Symbolen wie $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ ist im Fließtext grundsätzlich unzulässig! In abgesetzten Formel sind diese erlaubt. Nichtbeachtung führt zu Punktabzug.
- (v) Wenn Sie eine Gleichheit $X = Y$ von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion $X \subset Y$ und $Y \subset X$ verifizieren.
- (vi) Wollen Sie beweisen, dass „ A genau dann gilt, wenn B gilt“, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation „wenn A , dann B “ sowie „wenn B , dann A “ zeigen! (Ersteres besagt, dass B *notwendig* für A ist, während Letzteres bedeutet, dass B *hinreichend* für A ist.)
- (vii) Die Aussage „wenn A , dann B “ ist äquivalent zur Aussage „wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht“.
- (viii) Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Man wähle dieses so einfach wie möglich.
- (ix) Wenn Sie Resultate *aus der Vorlesung zitieren* wollen, verwenden Sie die Nummerierung der Vorlesung oder benennen sie das Resultat. Zum Beispiel „Wegen Proposition 4.7 gilt ...“ oder „Nach dem Satz von Lagrange können wir ...“.
- (x) Alle Abgaben müssen *individuell und handschriftlich* verfasst sein.