Mathematisches Institut
Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 19

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra II

Erste Klausur am 13. Juli 2019

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher oder elektronische Geräte bleiben während der gesamten Prüfung verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten.
- Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Sei K ein Körper. Bestimmen Sie für $n = 8$ alle Jordan-Normalformen $N \in \mathrm{Mat}_n(K)$ von nilpotenten Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit

$$\deg(\mu_A) \leq 4 \leq \mathrm{rank}(A).$$

Geben Sie dabei auch die entsprechenden Zahlpartitionen und Young-Diagramme an.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_3)$$

trigonalisierbar ist, und bestimmen Sie die Jordan-Normalform.

Aufgabe 3. Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $W = \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Vermöge der symmetrischen Bilinearform

$$\Phi : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f, g) \longmapsto \mathrm{tr}(f \circ g)$$

fassen wir W als quadratischen Vektorraum auf. Zeigen Sie, dass Φ nicht-entartet ist, und bestimmen Sie die Signatur.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass es eine Matrix $S \in \mathrm{Sp}_2(K)$ gibt, die nicht diagonalisierbar ist.

Aufgabe 5. Seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume und $a \in V$, $b \in W$. Für welche Vektoren $x \in V$, $y \in W$ wird der Tensor

$$a \otimes b + a \otimes y + x \otimes b + x \otimes y \in V \otimes W$$

der Nullvektor?