Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei V ein K-Vektorraum, $f : V \to V$ ein Endomorphismus, und $U_i \subset V$, $i \in I$ eine Familie von invarianten Unterräumen. Verifizieren Sie, dass dann auch der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} U_i \subset V$$

ein invarianter Unterraum ist. Folgern Sie daraus, dass es zu jeder Teilmenge $X \subset V$ einen kleinsten invarianten Unterraum $U \subset V$ gibt, der X enthält.

Aufgabe 2. Sei A eine reelle 2×2-Matrix mit

$$\mathrm{tr}(A)^2 > 4 \det(A).$$

Zeigen Sie, dass es genau vier A-invariante Unterräume $U \subset \mathbb{R}^2$ gibt. Geben Sie weiterhin ein Beispiel mit $\mathrm{tr}(A)^2 = 4 \det(A)$ an, das genau drei invariante Unterräume erlaubt.

Aufgabe 3. Sei V ein K-Vektorraum und $f, g : V \to V$ zwei kommutierende Endomorphismen, also

$$f \circ g = g \circ f.$$

Beweisen Sie, dass jeder Eigenraum $U = \mathrm{Ker}(\lambda \, \mathrm{id}_V - f)$ von f ein invarianter Unterraum $U \subset V$ für g ist.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ein Matrix, für die jeder Untervektorraum $U \subset K^n$ invariant ist. Folgern Sie, dass es sich um eine Skalarmatrix handeln muss.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 11. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 2

Aufgabe 1. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ Matrizen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Ist A trigonalisierbar, so auch die Transponierte ${}^tA$.

(ii) Sind A, B trigonalisierbar, so auch die Summe $A + B$.

(iii) Sind A, B trigonalisierbar, so auch das Produkt AB.

(iv) Ist A trigonalisierbar, so auch die Potenzen A^r, $r \geq 0$.

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$. Wir bezeichnen die gleiche Matrix, aufgefasst als reelle Matrix, mit $B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Begründen Sie zu folgender Tabelle, welche Kominationen möglich sind und welche nicht.

	A nicht trig.	A trig. aber nicht diag.
B nicht trigonalisierbar		
B trig. aber nicht diag.		
B diagonalisierbar		

Aufgabe 3. Wir betrachten die ganzzahlige Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 9 & 1 & 7 \\ -14 & -2 & -12 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für die Körper $K = \mathbb{Q}, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_2$ die algebraischen und geometrischen Multiplizitäten $v_\lambda \geq m_\lambda$, und finden Sie heraus, ob A trigonalisierbar oder diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Beweisen Sie, dass f trigonalisierbar ist genau dann, wenn es eine Folge von invarianten Unterräumen

$$0 = U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_n = V$$

mit der Eigenschaft $\dim(U_r) = r$ gibt.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 18. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 3

Aufgabe 1. Listen Sie die möglichen Jordan-Normalformen für nilpotente $n \times n$-Matrizen für die Zahlen $n = 5$ und $n = 6$. Geben Sie dafür zuerst die entsprechenden Zahlpartitionen und Young-Diagramme an.

Aufgabe 2. Sei $V \subset K[T]$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad $\deg(P) \leqslant 5$. Verifizieren Sie, dass der Ableitungsoperator

$$\frac{\partial}{\partial T} : V \longrightarrow V, \quad T^n \longmapsto nT^{n-1}$$

nilpotent ist, und bestimmen Sie dessen Jordan-Normalform in Abhängigkeit von der Charakteristik $p \geq 0$.

Aufgabe 3. Sei V ein K-Vektorraum von Dimension $n = 2$. Gegeben seien zwei nilpotente Endomorphismen $f, g : V \to V$, deren Verkettung ebenfalls nilpotent ist.

(i) Beweisen Sie mithilfe der Jordan-Normalform, dass dann $f \circ g = 0$.

(ii) Bleibt diese Aussage für $n = 3$ richtig?

Aufgabe 4. Seien N_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$ die fünf möglichen Jordan-Normalformen für nilpotenten 4×4-Matrizen. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi : \{N_1, \ldots, N_5\} \longrightarrow \{N_1, \ldots, N_5\},$$

welche $A = N_i$ auf die Jordan-Normalform N_j von der Potenz A^2 abbildet. Stellen Sie zu dieser Abbildung die Wertetabelle auf.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 25. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut SS19
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und T eine Unbestimmte. Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ genau dann nilpotent ist, wenn

$$\det(E - TA) = 1$$

gilt. Verwenden Sie dafür den Skalar $T^{-1} = 1/T$ aus dem rationalen Funktionenkörper $F = K(T)$.

Aufgabe 2. Sei V eine endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Beweisen Sie, dass jeder verallgemeinerter Eigenraum

$$V_{(\lambda)} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathrm{Ker}(f - \lambda \, \mathrm{id}_V)^i$$

bereits der Kern der Potenz $(f - \lambda \, \mathrm{id}_V)^v$ ist, wobei der Exponent $v = v_\lambda$ die algebraische Multiplizität des Skalars $\lambda \in K$ ist.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathrm{Mat}_4(K)$ nilpotent. Welche Jordan-Normalform muss A haben, damit es eine Wurzel besitzt, d.h. $A = B^2$ für eine andere Matrix $B \in \mathrm{Mat}_4(K)$?

Aufgabe 4. Wir betrachten die 4×4-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_7),$$

deren Spektrum die Menge $\sigma(A) = \{1, 5\}$ ist.

(i) Bestimmen Sie zu den Eigenwerten die geometrischen und algebraischen Multiplizitäten $m_\lambda \leqslant v_\lambda$.
(ii) Berechnen Sie Basen für die Eigenräume und verallgemeinerten Eigenräume $V_\lambda \subset V_{(\lambda)}$ im Standardvektorraum $V = (\mathbb{F}_7)^4$.

(iii) Entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar oder trigonalisierbar ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 2. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 5

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Jordan-Normalform zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_3).$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Anzahl $c_p \geq 1$ der Änlichkeitsklassen von trigonalisierbaren Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_p)$ für die Primzahlen $p = 2$ sowie $p = 3$. Benutzen Sie dafür die Jordan-Normalform.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jede komplexe Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ ähnlich zur transponierten Matrix ${}^tA$ ist. Benutzen Sie dafür die Jordan-Normalform.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(K)$ eine Matrix, die nicht trigonalisierbar ist.

(i) Angenommen, dass Spektrum $\sigma(A)$ ist nicht-leer. Beweisen Sie, dass A ähnlich zu einer Matrix der Form

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

ist, mit eindeutig bestimmten Einträgen $\alpha, \beta, \gamma \in K$.

(ii) Folgern Sie, dass A in jedem Fall ähnlich zu einer Begleitmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & \tau \end{pmatrix}$$

ist, wiederum mit eindeutig bestimmten Einträgen $\lambda, \mu, \tau \in K$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 9. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 6

Aufgabe 1. Berechnen Sie explizit mit dem euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler $G = \mathrm{ggT}(P, Q)$ der Polynome

$$P = T^6 - \lambda T^3 - 2T + 1 \quad \text{und} \quad Q = T^3 - \alpha T^2 + T - 3$$

über dem Primkörper $\mathbb{F}_{11}$. Hierbei ist $\lambda \geq 0$ die letzte Ziffer ihrer Matrikelnummer und $\alpha \geq 0$ die Anzahl der Buchstaben in Ihrem Nachnamen ist.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle Homomorphismen von $\mathbb{R}$-Algebren

$$h : \mathbb{C} = \mathbb{R}[T]/(T^2 + 1) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}),$$

indem Sie alle reellen 2×2-Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $A^2 = -E$ angeben. Bestimmen Sie dabei auch die Jordan-Normalform über den komplexen Zahlen.

Aufgabe 3. Wir betrachten die ganzzahlige Begleitmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_5)$ nicht trigonalisierbar ist.

(ii) Konstruieren Sie eine Körpererweiterung $L = \mathbb{F}_5[T]/(P)$ mit $\mathrm{Card}(L) = 25$ so, dass $A \in \mathrm{Mat}_3(L)$ trigonalisierbar wird.

(iii) Geben Sie das Spektrum und die Jordan-Normalform von der Matrix A über dem Körper L an.

Aufgabe 4. Konstruieren Sie mit MAGMA eine 5×5-Matrix $A = (\lambda_{ij})$ über dem endlichen Körper $K = \mathbb{F}_{19}$ mit folgenden drei Eigenschaften:

(i) Die Matrix A ist nilpotent mit $A^3 = 0$.

(ii) Alle Einträge sind $\lambda_{ij} \neq 0$.

(iii) Die Jordan-Normalform N von A besteht aus zwei Jordan-Blöcken.

Benutzen Sie dazu den frei zugänglichen *Magma Calculator* auf der Webseite

`http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/`,

und geben Sie die verwendeten Befehle an.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 16. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 7

Aufgabe 1. (i) Zeigen Sie, dass zwei trigonalisierbare Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_3(K)$ genau dann ähnlich sind, wenn

$$\chi_A(T) = \chi_B(T) \quad \text{und} \quad \mu_A(T) = \mu_B(T).$$

(ii) Bleibt die Aussage für 4×4-Matrizen richtig?

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass jedes normierte Polynom $P \in K[T]$ das Minimalpolynom eines Endomorphismus $f : V \to V$ ist, wobei $\dim(V) = \deg(P)$. Verwenden Sie dazu den Quotientvektorraum $K[T]/(P)$.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Beschreiben Sie, wie das Minimalpolynom $\mu_{A^2}(T)$ aus dem Minimalpolynom $\mu_A(T)$ hervorgeht.

Aufgabe 4. Sei $f : V \to V$ trigonalisierbar. Beweisen Sie, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn es zu jedem invarianten Unterraum $U \subset V$ ein invariantes Komplement $U' \subset V$ gibt.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 23. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut SS19
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei $V \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ der 4-dimensionale reelle Untervektorraum aller komplexen Matrizen der Form

$$B = \begin{pmatrix} x & z \\ \bar{z} & y \end{pmatrix}$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$. Rechnen Sie nach, dass

$$\Phi(B, C) = \det(B + C) - \det(B) - \det(C)$$

eine Bilinearform auf V ist. Wählen Sie eine Basis $B_1, \ldots, B_4 \in V$ und stellen Sie die Gram-Matrix auf.

Aufgabe 2. Wir betrachten die 2×2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass A, B als komplexe Matrizen kongruent sind, jedoch als reelle Matrizen nicht kongruent sind.

Aufgabe 3. Sei V ein drei-dimensionaler Vektorraum, $\lambda \in K^\times$ ein Skalar, und $a_1, \ldots, a_3 \in V$ eine Basis. Drücken Sie die duale Basis $b_1^*, b_2^*, b_3^* \in V^*$ zur Basis

$$b_1 = a_1 + a_2 - a_3, \quad b_2 = a_3, \quad b_3 = \lambda a_2$$

durch die duale Basis $a_1^*, \ldots, a_3^* \in V^*$ aus.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K von Charakteristik $p \geq 0$. Wir betrachten den Endomorphismus

$$\mathrm{Bil}(V, K) \longrightarrow \mathrm{Bil}(V, K), \quad \Phi \longmapsto \Phi',$$

welcher eine Bilinearform $\Phi(x, y)$ auf die Bilinearform $\Phi'(x, y) = \Phi(y, x)$ schickt. Berechnen Sie die Jordan-Normalform zu $\Phi \mapsto \Phi'$. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $p \neq 2$ und $p = 2$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 29. Mai um 16:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 9

Aufgabe 1. Wir betrachten die Bilinearform Φ auf dem Standardvektorraum $V = \mathbb{Q}^3$ zur Gram-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Verifizieren Sie, dass die symmetrische Bilinearform Φ nicht-entartet ist.

(ii) Berechnen Sie eine Basis für das orthogonale Komplement zu $e_1 \in V$.

(iii) Bestimmen Sie die Signatur (r, s).

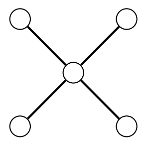
Aufgabe 2. Sei U ein m-dimensionaler K-Vektorraum, U^* sein Dualraum, und $V = U \oplus U^*$. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : V \times V \longrightarrow K, \quad ((x, \varphi), (y, \psi)) \longmapsto \varphi(y) - \psi(x)$$

(i) Verifizieren Sie, dass Φ eine nicht-entartete alternierende Bilinearform ist.

(ii) Finden Sie eine symplektische Basis $a_1, \ldots, a_{2m} \in V$.

Aufgabe 3. Unter einem *Graphen* Γ versteht man ein Gebilde aus *Ecken* und *Kanten*, wie zum Beispiel:



Zu einem Graphen Γ betrachten wir den rationalen Vektorraum $V = \bigoplus \mathbb{Q}a_i$, dessen Basisvektoren $a_i \in V$ den Ecken $a_i \in \Gamma$ des Graphen entspricht, und definieren eine symmetrische Bilinearform $\Phi : V \times V \to \mathbb{Q}$ durch

$$\Phi(a_i, a_j) = \begin{cases} -2 & \text{wenn die beiden Ecken } a_i, a_j \text{ übereinstimmen;} \\ 1 & \text{wenn } a_i \neq a_j \text{ durch eine Kante verbunden sind;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie für obigen Graphen Γ das Radikal $\operatorname{Rad}(\Phi) \subset V$, und bestimmen Sie die Signatur (r, s) der induzierten nicht-entarteten Form auf dem Quotientenvektorraum $\bar{V} = V/\operatorname{Rad}(\Phi)$.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einer symmetrischen oder antisymmetrischen Bilinearform

$$\Phi : V \times V \longrightarrow K,$$

und $U_1 \subset V$ ein Untervektorraum. Wir schreiben $\Phi_1 = \Phi_{U_1}$ für die Einschränkung der Bilinearform. Beweisen Sie, dass es eine orthogonale Zerlegung $V = U_1 \oplus U_2$ gibt genau dann, wenn $\operatorname{Rad}(\Phi_1) = \operatorname{Rad}(\Phi) \cap U_1$ gilt.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 13. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $H \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ die Teilmenge aller Hermiteschen Matrizen.

(i) Verifizieren Sie, dass H ein reeller Untervektorraum ist, jedoch für $n \geq 1$ kein komplexer Untervektorraum sein kann.

(ii) Berechnen Sie seine reelle Dimension.

(iii) Bestimmen Sie die Anzahl der Kongruenzklassen von Hermiteschen Matrizen $A \in V$. Die Äquivalenzrelation ist hier also

$$A \sim B \quad \Longleftrightarrow \quad B = {}^tSA\bar{S} \text{ für ein } S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 2. Sei $S \in U(n)$. Zeigen Sie, dass es eine invariante orthogonale Zerlegung

$$\mathbb{C}^n = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$$

mit eindimensionalen Untervektorräumen $L_i \subset \mathbb{C}^n$ gibt.

Aufgabe 3. Wir betrachten die klassische Gruppe $O(1,1) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Konstruieren Sie einen surjektiven Homomorphismus von Gruppen

$$O(1,1) \longrightarrow \{\pm 1\} \times S_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2,$$

indem sie Determinante und lichtartige Vektoren $a \in \mathbb{R}^2$ heranziehen.

Aufgabe 4. Schreiben Sie den Homomorphismus von Gruppen

$$\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3), \quad S \longmapsto (A \mapsto SAS^{-1}),$$

welcher durch die Konjugationswirkung auf den spurlosen anti-Hermiteschen Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ gegeben ist, in expliziter Form

$$\begin{pmatrix} x+iy & -r+is \\ r+is & x-iy \end{pmatrix} \longmapsto (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3},$$

indem sie die Matrixeinträge α_{ij} durch die Real- und Imaginärteile x, y, r, s ausdrücken.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 19. Juni um 16:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei K ein Körper. Verifizieren Sie die Gleichheit

$$\mathrm{Sp}_2(K) = \mathrm{SL}_2(K)$$

von Untergruppen in der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_2(K)$.

Aufgabe 2. Sei V ein euklidischer Vektorraum, mit Skalarprodukt Φ. Zu gegebenen Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in V$ bilden wir den Ausdruck

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \det\big(\Phi(x_i, x_j)\big)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass stets $F(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ gilt, mit Gleichheit genau dann, wenn die Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in V$ linear abhängig sind.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $V = \mathrm{Mat}_n(K)$, versehen mit der symmetrischen Bilinearform

$$\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(AB).$$

Zeigen Sie, dass der quadratische Vektorraum (V, Φ) isomorph zur orthogonalen Summe

$$L^n \oplus H^{n(n-1)/2}$$

ist, wobei $L = K$ mit Gram-Matrix (1) und $H = K^2$ mit Gram-Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 4. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K von Charakteristik $p \neq 2$. Wir schreiben die kanonische Paarung $V \times V^* \to K$ als $\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x)$. Sei $a \in V$ ein Vektor und $a^\vee \in V^*$ eine Linearform mit $\langle a, a^\vee \rangle = 2$. Betrachte den Endomorphismus

$$s = s_{a,a^\vee} : V \longrightarrow V, \quad x \longmapsto x - \langle x, a^\vee \rangle a.$$

Zeigen Sie folgendes:

(i) Die Hyperebene $H = \mathrm{Ker}(a^\vee)$ ist der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 1$, die Gerade $L = Ka$ ist der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = -1$.

(ii) Es gilt $s^2 = \mathrm{id}_V$, und der Endomorphismus $s : V \to V$ ist diagonalisierbar.

(iii) Minimalpolynom und charakteristisches Polynom sind

$$\mu_s(T) = (T-1)(T+1) \quad \text{und} \quad \chi_s(T) = (T-1)^{n-1}(T+1).$$

(iv) Jeder Endomorphismus $f : V \to V$ mit $\mu_f(T)$ und $\chi_f(T)$ wie oben ist von der Form $f = s_{a,a^\vee}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 27. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 12

Aufgabe 1. Seien V und W zwei K-Vektorräume. Angenommen, $a \neq 0$ und $b \neq 0$ sind Vektoren aus V bzw. W. Verifizieren Sie, dass der Tensor

$$a \otimes b \in V \otimes W$$

nicht der Nullvektor ist.

Aufgabe 2. Seien V, W zwei K-Vektorräume. Konstruieren Sie eine kanonische lineare Abbildung

$$f : V^* \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, W),$$

die injektiv ist. Verifizieren Sie, dass Φ bijektiv ist, falls V, W endlichdimensional sind.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, der nicht quadratisch abgeschlossen ist, etwa $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{F}_3$. Konstruieren Sie Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_2(K)$ so, dass das Kronecker-Produkt

$$A \otimes B \in \mathrm{Mat}_4(K)$$

trigonalisierbar ist, ohne dass A, B diese Eigenschaft haben.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und $\lambda, \mu \neq 0$ zwei Skalare. Berechnen Sie die Jordan-Normalform des Kronecker-Produkts

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von der Charakteristik $p \geq 0$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 4. Juli um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Schriftliche Prüfung: Die erste Klausur findet am Samstag, den 13. Juli statt. Die Anmeldefrist endet am 6. Juli. Angemeldete Studierende, welche die Zulassungsvoraussetzungen nicht erfüllen, gelten als abgemeldet. Insbesondere Wiederholer, die in der Vergangenheit die Zulassungsvoraussetzung erreicht haben, müssen rechtzeitig sicherstellen, dass in unserer Liste die Anmeldung sowie die Erfüllung der Zulassungsvoraussetzung erfasst wurden.

Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:

1. Beschäftigen Sie sich bereits *ab dem Ausgabetag* mit den Übungsaufgaben.
2. Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.
3. *Diskutieren* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben.
4. Schreiben Sie Ihre Lösungen in *vollständigen und korrekten deutschen Sätzen* auf! Die Verwendung von logischen Symbolen wie $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ ist im Fließtext grundsätzlich unzulässig! In abgesetzten Formel sind diese erlaubt. Nichtbeachtung führt zu Punktabzug.
5. Wenn Sie eine Gleichheit $X = Y$ von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion $X \subset Y$ und $Y \subset X$ verifizieren.
6. Wollen Sie beweisen, dass „A genau dann gilt, wenn B gilt“, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation „wenn A, dann B“ sowie „wenn B, dann A“ zeigen! (Ersteres besagt, dass B *notwendig* für A ist, während Letzteres bedeutet, dass B *hinreichend* für A ist.)
7. Die Aussage „wenn A, dann B“ ist äquivalent zur Aussage „wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht“.
8. Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Aus Bequemlichkeit wähle man dieses so einfach wie möglich.
9. Wenn Sie Resultate *aus der Vorlesung zitieren* wollen, verwenden Sie die Nummerierung der Vorlesung oder benennen sie das Resultat. Zum Beispiel „Wegen Proposition 4.7 gilt ...“ oder „Nach Basisergänzungssatz können wir ...“.
10. Alle Abgaben müssen *individuell, handschriftlich, und ohne elektronische Hilfsmittel* verfasst sein.
11. Verwenden Sie *Deckblatt* und *Heftklammern* für Ihre Abgaben!