Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei K ein Körper. Verifizieren Sie die Gleichheit

$$\mathrm{Sp}_2(K) = \mathrm{SL}_2(K)$$

von Untergruppen in der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_2(K)$.

Aufgabe 2. Sei V ein euklidischer Vektorraum, mit Skalarprodukt Φ. Zu gegebenen Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in V$ bilden wir den Ausdruck

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \det\big(\Phi(x_i, x_j)\big)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass stets $F(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ gilt, mit Gleichheit genau dann, wenn die Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in V$ linear abhängig sind.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $V = \mathrm{Mat}_n(K)$, versehen mit der symmetrischen Bilinearform

$$\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(AB).$$

Zeigen Sie, dass der quadratische Vektorraum (V, Φ) isomorph zur orthogonalen Summe

$$L^n \oplus H^{n(n-1)/2}$$

ist, wobei $L = K$ mit Gram-Matrix (1) und $H = K^2$ mit Gram-Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 4. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K von Charakteristik $p \neq 2$. Wir schreiben die kanonische Paarung $V \times V^* \to K$ als $\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x)$. Sei $a \in V$ ein Vektor und $a^\vee \in V^*$ eine Linearform mit $\langle a, a^\vee \rangle = 2$. Betrachte den Endomorphismus

$$s = s_{a,a^\vee} : V \longrightarrow V, \quad x \longmapsto x - \langle x, a^\vee \rangle a.$$

Zeigen Sie folgendes:

(i) Die Hyperebene $H = \mathrm{Ker}(a^\vee)$ ist der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 1$, die Gerade $L = Ka$ ist der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = -1$.

(ii) Es gilt $s^2 = \mathrm{id}_V$, und der Endomorphismus $s : V \to V$ ist diagonalisierbar.

(iii) Minimalpolynom und charakteristisches Polynom sind

$$\mu_s(T) = (T-1)(T+1) \quad \text{und} \quad \chi_s(T) = (T-1)^{n-1}(T+1).$$

(iv) Jeder Endomorphismus $f : V \to V$ mit $\mu_f(T)$ und $\chi_f(T)$ wie oben ist von der Form $f = s_{a,a^\vee}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 27. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.