Mathematisches Institut SS19
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $H \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ die Teilmenge aller Hermiteschen Matrizen.

(i) Verifizieren Sie, dass H ein reeller Untervektorraum ist, jedoch für $n \geq 1$ kein komplexer Untervektorraum sein kann.

(ii) Berechnen Sie seine reelle Dimension.

(iii) Bestimmen Sie die Anzahl der Kongruenzklassen von Hermiteschen Matrizen $A \in V$. Die Äquivalenzrelation ist hier also

$$A \sim B \quad \Longleftrightarrow \quad B = {}^tSA\bar{S} \text{ für ein } S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 2. Sei $S \in U(n)$. Zeigen Sie, dass es eine invariante orthogonale Zerlegung

$$\mathbb{C}^n = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$$

mit eindimensionalen Untervektorräumen $L_i \subset \mathbb{C}^n$ gibt.

Aufgabe 3. Wir betrachten die klassische Gruppe $O(1,1) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Konstruieren Sie einen surjektiven Homomorphismus von Gruppen

$$O(1,1) \longrightarrow \{\pm 1\} \times S_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2,$$

indem sie Determinante und lichtartige Vektoren $a \in \mathbb{R}^2$ heranziehen.

Aufgabe 4. Schreiben Sie den Homomorphismus von Gruppen

$$\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3), \quad S \longmapsto (A \mapsto SAS^{-1}),$$

welcher durch die Konjugationswirkung auf den spurlosen anti-Hermiteschen Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ gegeben ist, in expliziter Form

$$\begin{pmatrix} x+iy & -r+is \\ r+is & x-iy \end{pmatrix} \longmapsto (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3},$$

indem sie die Matrixeinträge α_{ij} durch die Real- und Imaginärteile x, y, r, s ausdrücken.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 19. Juni um 16:25 Uhr im Zettelkasten.