Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 9

Aufgabe 1. Wir betrachten die Bilinearform Φ auf dem Standardvektorraum $V = \mathbb{Q}^3$ zur Gram-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Verifizieren Sie, dass die symmetrische Bilinearform Φ nicht-entartet ist.

(ii) Berechnen Sie eine Basis für das orthogonale Komplement zu $e_1 \in V$.

(iii) Bestimmen Sie die Signatur (r, s).

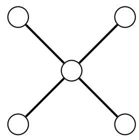
Aufgabe 2. Sei U ein m-dimensionaler K-Vektorraum, U^* sein Dualraum, und $V = U \oplus U^*$. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : V \times V \longrightarrow K, \quad ((x, \varphi), (y, \psi)) \longmapsto \varphi(y) - \psi(x)$$

(i) Verifizieren Sie, dass Φ eine nicht-entartete alternierende Bilinearform ist.

(ii) Finden Sie eine symplektische Basis $a_1, \ldots, a_{2m} \in V$.

Aufgabe 3. Unter einem *Graphen* Γ versteht man ein Gebilde aus *Ecken* und *Kanten*, wie zum Beispiel:



Zu einem Graphen Γ betrachten wir den rationalen Vektorraum $V = \bigoplus \mathbb{Q}a_i$, dessen Basisvektoren $a_i \in V$ den Ecken $a_i \in \Gamma$ des Graphen entspricht, und definieren eine symmetrische Bilinearform $\Phi : V \times V \to \mathbb{Q}$ durch

$$\Phi(a_i, a_j) = \begin{cases} -2 & \text{wenn die beiden Ecken } a_i, a_j \text{ übereinstimmen;} \\ 1 & \text{wenn } a_i \neq a_j \text{ durch eine Kante verbunden sind;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie für obigen Graphen Γ das Radikal $\mathrm{Rad}(\Phi) \subset V$, und bestimmen Sie die Signatur (r, s) der induzierten nicht-entarteten Form auf dem Quotientenvektorraum $\bar{V} = V/\mathrm{Rad}(\Phi)$.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einer symmetrischen oder antisymmetrischen Bilinearform

$$\Phi : V \times V \longrightarrow K,$$

und $U_1 \subset V$ ein Untervektorraum. Wir schreiben $\Phi_1 = \Phi_{U_1}$ für die Einschränkung der Bilinearform. Beweisen Sie, dass es eine orthogonale Zerlegung $V = U_1 \oplus U_2$ gibt genau dann, wenn $\mathrm{Rad}(\Phi_1) = \mathrm{Rad}(\Phi) \cap U_1$ gilt.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 13. Juni um 16:25 Uhr im Zettelkasten.