Mathematisches Institut
Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 18/19

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

Zweite Klausur am 29. März 2019

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher oder elektronische Geräte bleiben während der gesamten Prüfung verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten.
- Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $U \subset V$ ein Untervektorraum, und $a \in V$ ein Vektor. Angenommen, es gilt $a \notin U$. Zeigen Sie, dass es einen Untervektorraum $H \subset V$ mit den drei Eigenschaften

$$\dim(H) = n - 1 \quad \text{und} \quad U \subset H \quad \text{und} \quad a \notin H$$

gibt.

Aufgabe 2. Sei $n \geq 1$ eine ungerade Zahl und $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Wir betrachten den Untervektorraum $U_1 \subset V$ aller Matrizen $A = (\lambda_{ij})$ mit ${}^tA = -A$, sowie den Untervektorraum $U_2 \subset V$ aller Matrizen $B = (\mu_{ij})$, deren Einträge μ_{ij} für $i + j \neq n + 1$ verschwinden. Berechnen Sie die Dimensionen von

$$U_1, U_2, U_1 \cap U_2 \quad \text{und} \quad U_1 + U_2.$$

Aufgabe 3. Wir betrachten die 2×2-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Berechnen Sie eine Basis für den Vektorraum

$$U = \{B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q}) \mid BA = AB\}$$

aller mit A kommutierenden Matrizen.

Aufgabe 4. Für welche Primzahlen $p > 0$ ist die ganzzahlige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 1 \\ -43 & 23 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

aufgefasst als Element in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_p)$ invertierbar? Geben Sie für zwei dieser Primzahlen das Inverse explizit an.

Aufgabe 5. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} d & a \\ c & b \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie das charakteristische Polynom $\chi_f(T) \in \mathbb{C}[T]$ auf, berechnen Sie das Spektrum $\sigma(f) \subset \mathbb{C}$, und entscheiden Sie, ob f diagonalisierbar ist.