Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 13

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine reelle Matrix, aufgefasst als komplexe Matrix. Verifizieren Sie, dass mit jedem komplexen Eigenwert $z = x + iy$ auch die konjugierte Zahl $\bar{z} = x - iy$ ein komplexer Eigenwert ist.

Aufgabe 2. Sei $A = (\lambda_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, und $r \geq 0$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass $\mathrm{rank}(A) \geq r$ genau dann gilt, wenn es r-elementige Teilmengen

$$I \subset \{1, \ldots, m\} \quad \text{and} \quad J \subset \{1, \ldots, n\}$$

gibt so, dass $\det(B) \neq 0$ für die $r \times r$-Matrix $B = (\lambda_{ij})_{i\in I, j\in J}$ gilt.

Aufgabe 3. Wir betrachten die $n \times n$-Matrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion und Laplace-Entwicklung, dass

$$\det(A_n) = (-1)^n(n+1).$$

Aufgabe 4. Für welche Primzahlen $p > 0$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 1 \\ -10 & -10 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_p)$$

invertierbar? Wann ist sie diagonalisierbar?

Abgabe: entfällt. Dieses Blatt wird nicht korrigiert und geht nicht in die Wertung ein.