Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 12

Aufgabe 1. (i) Bestimmen Sie den linearen Term im charakteristischen Polynom $\chi_A(T) = \det(TE - A)$ der allgemeinen 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix},$$

vermöge der Jägerzaunregel.

(ii) Berechnen Sie die Determinante der 4×4-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 93 & 85 & 594 & 6 \\ -4 & 3 & -21 & 1 \\ -15 & -14 & -96 & -1 \\ 53 & 22 & 320 & -2 \end{pmatrix}$$

durch geschickte Zeilen- und Spaltenoperationen. (Hinweis: Das Ergebnis ist eine einstellige Zahl.)

Aufgabe 2. Wie betrachten die komplexe Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 12 & 8 & -5 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$, indem Sie eine Wurzel vom charakteristischen Polynom $\chi_A(T) \in \mathbb{C}[T]$ erraten.

(ii) Berechnen Sie die geometrischen Multiplizitäten $m_\lambda > 0$ der Eigenwerte und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3. Für welche Parameter $x \in \mathbb{R}$ ist die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x-1 & 2 & x \\ -2x+2 & x+1 & -2x+2 \\ -x+1 & 4x+18 & -x+9 \end{pmatrix}$$

invertierbar?

Aufgabe 4. Sei K ein Körper von Charakteristik $p \geq 0$, und $V = \mathrm{Mat}_2(K)$ der Vektorraum aller 2×2-Matrizen. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad B \longmapsto {}^tB,$$

welcher die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ auf die transponierte Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ schickt.

(i) Beschreiben Sie $f \in \mathrm{End}(V)$ durch eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(K)$.

(ii) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(T) \in K[T]$.

(iii) Beweisen Sie, dass f diagonalisierbar ist genau dann, wenn $p \neq 2$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 23. Januar um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Erlaubtes Hilfsmittel bei den Klausuren: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.