Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix und

$$\sigma(A) = \{\lambda \in K \mid \exists a \in V \text{ mit } a \neq 0 \text{ und } f(a) = \lambda a\}$$

ihr Spektrum, also die Menge der Eigenwerte. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es gilt $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ genau dann, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist.

(ii) Die Summe $a + b$ von zwei Eigenvektoren $a, b \in K^n$ ist ein Eigenvektor.

(iii) Sind λ, μ Eigenwerte von A, so ist das Produkt $\lambda\mu$ Eigenwert von A^2.

(iv) Ist A invertierbar und diagonalisierbar, so ist auch A^{-1} diagonalisierbar.

(v) Aus der Bedingung $A^n = 0$, $n \geq 1$ folgt die Gleichheit $\sigma(A) = \{0\}$.

Aufgabe 2. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ eine reelle 2×2-Matrix. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar aber keine Skalarmatrix ist genau dann, wenn

$$(a - d)^2 + 4bc > 0$$

gilt. Geben Sie dafür eine Formel für die Eigenwerte $\lambda \in K$ an. Benutzen Sie dabei die Diskriminante Δ des charakteristischen Polynoms $\chi_A(T)$.

Aufgabe 3. Sei $V = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller stetigen Funktionen. Wir betrachten die Abbildung $A : V \to V$, welche eine Funktion $f(x)$ auf die Funktion $f(x + 1)$ schickt. Zeigen Sie, dass das Spektrum dieses Endomorphismus durch

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \neq 0\}$$

gegeben ist. Verwenden Sie dabei die Expenonentialfunktion $\exp(x)$ sowie die trigononmetrische Funktion $\sin(x)$, um entsprechende Eigenvektoren zu konstruieren.

Aufgabe 4. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums über dem endlichen Primkörper $K = \mathbb{F}_{11}$. Angenommen, die dreifache Verkettung $f^3 = f \circ f \circ f$ ist die Identitätsabbildung id_V.

(i) Zeigen Sie, dass nur $\lambda = 1$ ein Eigenwert sein kann.

(ii) Folgern Sie, dass f diagonalisierbar ist genau dann, wenn $f = \mathrm{id}_V$ gilt.

(iii) Konstruieren Sie ein nicht-diagonalisierbares Beispiel mit $V = (\mathbb{F}_{11})^2$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 16. Januar um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Die **erste Klausur** findet am Samstag, den 2. Februar 2019 von 9:00–11:00 Uhr statt. Nähere Informationen entnehmen sie der Homepage zur Vorlesung. Die **Anmeldung/Abmeldung** zu dieser Prüfung geschieht online über das Studierendenportal und ist bis Samstag, den 26. Januar möglich. Angemeldete Kandidaten, welche die **Zulassungsvorraussetzungen** nicht erfüllt haben, gelten als abgemeldet. Alle angemeldeten Kandidaten werden voraussichtlich am Dienstag, den 29. Januar im Studierendenportal über den **Zulassungsstatus** informiert.

Die **zweite Klausur** findet am Freitag, den 29. März 2019 von 12:00–14:00 Uhr statt. Anmeldung/Abmeldung ist bis Freitag, den 22. März möglich.