Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 18/19

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei $V \subset \mathbb{R}[T]$ der Untervektorraum aller Polynome vom Grad $\deg(P) \leqslant 3$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f : V \longrightarrow V, \quad P \longmapsto P' - P''.$$

Hierbei ist $P'(T)$ die Ableitung des Polynoms $P(T)$.

(i) Stellen Sie die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ der linearen Abbildung bezüglich der Monombasis $T^0, \ldots, T^3 \in V$ auf.

(ii) Welches Polynom $P(T) \in V$ entspricht dem Bild von $(1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ unter der linearen Abbildung?

(iii) Finden Sie einen nicht-trivialen Vektor aus dem Kern der linearen Abbildung.

Aufgabe 2. Sei $V \subset \mathscr{C}(\mathbb{R})$ der von den beiden trigonometrischen Funktionen $\cos(x)$ und $\sin(x)$ erzeugte zwei-dimensionale Untervektorraum. Stellen Sie die Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{m\times 2}(\mathbb{R})$ bezüglich der Basis $\cos, \sin \in V$ zu den folgenden fünf linearen Abbildung auf:

(i) Die zwei linearen Abbildung $V \to V$, gegeben durch die Vorschrift

$$f(x) \longmapsto f'(x) \quad \text{und} \quad f(x) \longmapsto f(x+\pi).$$

(ii) Die beiden Linearformen $V \to \mathbb{R}$ mit

$$f \longmapsto f(\pi) \quad \text{und} \quad f \longmapsto \int_0^{\pi/2} f(x)dx.$$

(iii) Die lineare Abbildung

$$V \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f \longmapsto (f(\pi/2), \int_0^{\pi} f(x)dx, f(0)).$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jeder Untervektorraum $U \subset K^n$ des Standardvektorraumes die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

ist, indem Sie geeignete Basen wählen und lineare Abbildungen bilden.

Aufgabe 4. Sei V, W zwei Vektorräume, $f : V \to W$ eine Abbildung, und

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in V \text{ und } y = f(x)\}$$

ihr Graph. Beweisen Sie, dass die Abbildung $f : V \to W$ linear ist genau dann, wenn die Teilmenge $\Gamma_f \subset V \times W$ ein Untervektorraum ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 5. Dezember um 10:25 Uhr im Zettelkasten.