Mathematisches Institut SS 18
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 10

Aufgabe 1. Verifizieren Sie anhand von Kurvenprodukten $S = C \times C'$, Regelfächen $S = \mathbb{P}(\mathscr{E})$, sowie Flächen $S \subset \mathbb{P}^3$ vom Grad $d \geq 1$, dass der Bruch

$$\frac{c_1^2 + c_2}{12}$$

aus Noethers Formel tatsächlich eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 2. Berechnen Sie für $S = \mathbb{P}^2$ die zweite Chern-Zahl $c_2 = c_2(\Omega^1_{S/k})$ mit der Euler-Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^2/k} \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{2} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow 0$$

und der Hirzebruch–Riemann–Roch-Formel

$$\chi(\mathscr{E}) = \frac{L^2 - L \cdot K_S}{2} - c_2(\mathscr{E}) + r\chi(\mathscr{O}_S),$$

wobei $L = [\det(\mathscr{E})]$ und $r = \operatorname{rank}(\mathscr{E})$.

Aufgabe 3. Sei X eine Fläche, und $\mathscr{E}$ eine lokal freie Garbe vom Rank $r = 2$, welche in einer kurzen exakten Sequence

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}' \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{I}\mathscr{L} \longrightarrow 0$$

steckt, wobei $\mathscr{L}, \mathscr{L}'$ invertierbar und $\mathscr{I}$ eine Idealgarbe mit $\dim(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}) \leqslant 0$ ist. Berechnen Sie $c_2(\mathscr{E})$, einmal mit der Interpretation durch Null-Zyklen, ein anderes mal mit der Hirzebruch–Riemann–Roch-Formel.

Aufgabe 4. Sei S eine geometrisch reguläre Fläche, $D \subset S$ ein snc-Divisor, der in der Picard-Gruppe durch n teilbar ist,

$$X = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_S \oplus \mathscr{L}^{\otimes -1} \oplus \ldots \oplus \mathscr{L}^{\otimes 1-n})$$

die resultierende verzweigte Überlagerung. Berechen Sie mit Noethers Formel $\chi = (c_1^2 + c_2)/12$ die Chern-Zahl c_2 von der minimalen Aufösung der Singularitäten $X' \to X$ durch Invarianten der Fläche S, der invertierbaren Garbe $\mathscr{L}$ und dem Grad $n \geq 1$.

Abgabe: Bis Freitag, den 29. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.