Mathematisches Institut SS 18
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 3

Aufgabe 1. Verifizieren Sie, dass auf der Fläche

$$S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

im Unterschied zum $\mathbb{P}^2$ alle Geschlechter $g \geq 0$ mit Kurven $C \subset S$ realisiert werden können.

Aufgabe 2. Sei X eine normale Fläche mit $h^0(\mathscr{O}_X) = 1$, und $D \subset X$ ein effektiver Cartier-Divisor, und $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X(D)$ die resultierende invertierbare Garbe. Angenommen, D ist irreduzibel mit $D^2 < 0$. Deduzieren Sie, dass dann

$$h^0(\mathscr{L}^{\otimes t}) = 1$$

für alle $t \geq 0$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $S = \mathbb{P}(\mathscr{E})$ eine Regelfläche, mit Projektion $f : S \to B$. Zeigen Sie, dass die Formel

$$\omega_S = \mathscr{O}_S(-2) \otimes f^*(\omega_B \otimes \det \mathscr{E})$$

die dualisierende Garbe als Element in $\mathrm{Pic}(S)$ liefert, und nicht nur als numerische Klasse in $N(S)$.

Aufgabe 4. Sei $S = \mathbb{P}(\mathscr{E})$ eine Regelfläche, und $C_i = \mathbb{P}(\mathscr{L}_i)$ zwei Schnitte zu invertierbaren Quotienten $\mathscr{L}_i = \mathscr{E}/\mathscr{N}_i$. Drücken Sie Schnittzahl $(C_1 \cdot C_2)$ und Schnittmenge $C_1 \cap C_2$ durch die invertierbaren Garben $\mathscr{N}_i, \mathscr{L}_i$ aus.

Abgabe: Bis Freitag, den 11. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.