Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei C eine integre Gorenstein-Kurve, und $\mathscr{L}$ eine ample invertierbare Garbe. Zeigen Sie, dass dann $h^1(\mathscr{L}^{\otimes n}) = 0$ für alle $n \gg 0$ gilt.

Aufgabe 2. Wir betrachten die rationale Kurve

$$C = \operatorname{Spec} k[T^2, T^5] \cup \operatorname{Spec} k[T^{-1}]$$

über dem Grundkörper k. Verifizieren Sie, dass C Gorensteinsch ist und berechnen Sie den Grad $\deg(\omega_C)$ der dualisierenden Garbe. Betten Sie dazu die Kurve in den $\mathbb{P}^2$ ein.

Aufgabe 3. Seien $F, G \in k[T_0, T_1]$ zwei homogene Polymome vom Grad $m, n > 0$ ohne gemeinsamen Nullstelle auf $\mathbb{P}^1$. Verifizieren Sie, dass der resultierende Homomorphism

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{F,G} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$$

injektiv und der Kokern $\mathscr{L}$ invertierbar ist, und berechnen Sie $\deg(\mathscr{L})$ und $h^0(\mathscr{L})$.

Aufgabe 4. Sei C eine integre Kurve vom Geschlecht $g \geq 1$, und $a \in C$ ein rationaler Punkt, dessen lokaler Ring $\mathscr{O}_{C,a}$ regulär ist. Beweisen Sie, dass dann

$$h^0(\mathscr{L}) = 1 \quad \text{und} \quad h^1(\mathscr{L}) = g - 1$$

für die resultierende invertierbare Garbe $\mathscr{L} = \mathscr{O}_C(a)$ gilt. Argumentiered Sie dabei durch Widerspruch, indem Sie aus einem zwei-dimensionalen Untervektorraum von $H^0(C, \mathscr{L})$ einen Isomorphismus $f : C \to \mathbb{P}^1$ konstruieren.

Abgabe: Bis Freitag, den 26. Januar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.