Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei C eine Kurve und $f : C \to \mathbb{P}^1$ ein endlicher Morphismus. Verifizieren Sie, dass die kohärente Garbe

$$\mathscr{A} = f_*(\mathscr{O}_C)$$

lokal frei ist genau dann, wenn das Schema C keine eingebetteten Komponenten hat. Verwenden Sie dabei die Struktursätze für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen.

Aufgabe 2. Seien $m \geq 1$ und $n \geq 0$ zwei ganze Zahlen. Zeigen Sie, dass es eine Kurve C mit Reduktion $C_{\text{red}} = \mathbb{P}^1$ und

$$h^0(\mathscr{O}_C) = m \quad \text{und} \quad h^1(\mathscr{O}_C) = n$$

gibt. Konstruieren Sie dabei die Strukturgarbe als $\mathscr{O}_C = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{I}$, wobei die Idealgarbe $\mathscr{I}$ die Eigenschaft $\mathscr{I}^2 = 0$ besitzt.

Aufgabe 3. Sei C eine reduzierte Kurve und $a_1, \ldots, a_n \in C$ abgeschlossenen Punkte. Zeigen Sie, dass es einen endlichen Morphismus $f : C \to \mathbb{P}^1$ gibt mit

$$f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_n).$$

Verwenden Sie dabei einen zwei-dimensionalen Vektorraum $E \subset H^0(C, \mathscr{L})$ zu einer geeigneten amplen Garben $\mathscr{L}$.

Aufgabe 4. Sei X ein geringter Raum, $\mathscr{F}$ ein $\mathscr{O}_X$-Modul, und $\mathscr{E}$ ein lokal freier $\mathscr{O}_X$-Module vom endlichen Rang. Beweisen Sie mit injektiven Auflösungen, dass es eine kanonische Identifizierung

$$\operatorname{Ext}^i(\mathscr{E}, \mathscr{F}) = H^i(X, \mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F})$$

zwischen Ext-Gruppen und Kohomologie-Gruppen gibt. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel mit $X = \mathbb{P}^1$ und $i = 0$, dass dies für beliebige $\mathscr{E}$ im Allgemeinen falsch wird.

Abgabe: Bis Freitag, den 19. Januar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.