Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei C eine integre Kurve vom Geschlecht $h^1(\mathscr{O}_C) = 1$, dessen Normalisierung $\tilde{C}$ geometrisch integer ist. Verifizieren Sie mit der langen exakten Kohomologiesequenz zu

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow \nu_*(\mathscr{O}_{\tilde{C}}) \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0,$$

dass es höchstens einen singulären Punkt $a \in C$ geben kann.

Aufgabe 2. Sei C eine integre Kurve mit $h^1(\mathscr{O}_C) = 0$. Angenommen, es gibt eine invertierbare Garbe $\mathscr{L}$ vom Grad $\deg(\mathscr{L}) = 1$. Folgern Sie, dass dann $C \simeq \mathbb{P}^1$ gilt.

Aufgabe 3. Sei C eine Kurve, $\mathscr{L} = \mathscr{O}_C(1)$ eine ample invertierbare Garbe, und $\mathscr{F}$ eine kohärente Garbe. Zeigen Sie, dass für $n > 0$ hinreichend groß die kanonische Abbildung

$$H^0(C, \mathscr{F}(n)) \otimes_k \mathscr{O}_C \longrightarrow \mathscr{F}(n), \quad s \otimes 1 \longmapsto s(1)$$

surjektiv ist. Hierbei ist k der Grundkörper und $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{L}^{\otimes n}$. Benutzen Sie dabei den Fortsetzungssatz für lokale Schnitte.

Aufgabe 4. Sei $C = C_1 \cup C_2$ eine reduzierte zusammenhängende Kurve mit zwei irreduziblen Komponenten. Konstruieren Sie eine integre Kurve Z und eine eigentliche Morphismus $f : C \to Z$ so, dass $f(C_1) = \{b\}$ ein abgeschlossener Punkt ist und $f(C_2) = Z$ gilt. Verwenden Sie dazu geeignete semiample Garbe $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(C)$ mit $\mathscr{L}|C_1 = \mathscr{O}_{C_1}$. Illustrieren sie die Aussage mit einer Skizze.

Abgabe: Bis Freitag, den 12. Januar um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!