Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei X ein geringter Raum, und $\mathscr{F}_\lambda$, $\lambda \in L$ eine Familie von $\mathscr{O}_X$-Moduln. Angenommen, die $\mathscr{F}_\lambda$ sind injektiv oder welk. Verifizieren Sie, dass dann auch die Produktgarbe

$$\mathscr{F} = \prod_\lambda \mathscr{F}_\lambda$$

injektiv bzw. welk ist.

Aufgabe 2. Sei X ein geringter Raum, $\mathscr{F}$ eine $\mathscr{O}_X$-Modul, und $\beta \in H^r(X, \mathscr{F})$ eine Kohomologieklasse im Grad $r \geq 1$, und $a \in X$ ein Punkt. Zeigen Sie, dass es eine offenen Umgebung U gibt mit $\beta|U = 0$ in $H^r(U, \mathscr{F}|U)$.

Aufgabe 3. Sei X ein geringter Raum und $\mathscr{F}$ ein $\mathscr{O}_X$-Modul. Sei $U_\lambda \subset X$, $\lambda \in L$ eine Basis der Topologie. Angenommen, die Einschränkungen $\mathscr{F}|U_\lambda$ sind welk. Zeigen Sie, dass dann $\mathscr{F}$ welk ist, indem Sie das Lemma von Zorn auf Erweiterungen von lokalen Schnitten über offenen Umgebungen anwenden.

Aufgabe 4. Sei X ein geringter Raum und

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathscr{O}_X$-Moduln. Angenommen, der linke Term $\mathscr{F}'$ is welk. Zeigen Sie, dass sich jeder globale Schnitt von $\mathscr{F}''$ zu einem globalen Schnitt von $\mathscr{F}$ liften lässt, indem sie das Lemma von Zorn anwenden. Geben Sie anschließend noch einen kohomologischen Beweis.

Abgabe: Bis Freitag, den 15. Dezember um 8:25 Uhr im Zettelkasten.