Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei $f : X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus von Schemata. Angenommen, jeder generische Punkt $\eta \in Y$ liegt im Bild. Deduzieren Sie, dass f surjektiv sein muss.

Aufgabe 2. Sei R ein noetherscher Ring, X ein eigentliches R-Schema, $\mathscr{L}$ eine ample Garbe, und $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ ein globaler Schnitt. Verifizieren Sie, dass die resultierende offenen Menge $X_s = \{a \in X \mid s(a) \neq 0\}$ affin ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie, in der alle Faserprodukte existieren, sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Morphismen. Zeigen Sie, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\Delta"] & Y \times_Z Y & \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\Gamma_f"] \arrow[dr, "f"'] & X \times_Z Y \arrow[u, "f\times\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & X \arrow[d, "g\circ f"] \\
 & Z \times_Z Y \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"'] & Z
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist und die beiden Quadrate cartesisch sind.

Aufgabe 4. Sei R ein noetherscher Ring und X ein projektives R-Schema. Zeigen Sie, dass es dann eine $\mathbb{Z}$-Unteralgebra vom endlichen Typ $R_0 \subset R$ und ein projektives R_0-Scheme X_0 gibt so, dass $X \simeq X_0 \otimes_{R_0} R$.

Abgabe: Bis Freitag, den 8. Dezember um 8:25 Uhr im Zettelkasten.