Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei X ein Schema. Angenommen, die Diagonale

$$\Delta : X \longrightarrow X \times X$$

ist ein affiner oder quasikompakter Morphismus. Was bedeuten diese beiden Eigenschaften für die Durchschnitte $U \cap V$ zweier affinen offenen Mengen $U, V \subset X$?

Aufgabe 2. Sei X ein Schema, dessen zugrundeliegender Raum noethersch ist, und $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe. Zeigen Sie, dass die kanonischen Abbildung

$$r : X \smallsetminus \operatorname{SBs}(\mathscr{L}) \longrightarrow P(X, \mathscr{L}) = \operatorname{Proj} R(X, \mathscr{L})$$

dichtes Bild hat.

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper, X ein separiertes quasikompaktes Schema, $k \subset A$ eine Ringerweiterung,

$$X' = X \otimes_k A = X \times_{\operatorname{Spec}(k)} \operatorname{Spec}(A)$$

der resultierende Basiswechsel, und $p : X' \to X$ die Projektion. Zeigen Sie, dass für jede quasikohärente Garbe $\mathscr{F}$ auf X die kanonische Abbildung

$$H^0(X, \mathscr{F}) \otimes_k A \longrightarrow H^0(X', p^*(\mathscr{F}))$$

bijektiv ist, indem Sie das Garbenaxiom heranziehen und Flachheit ausnutzen.

Aufgabe 4. Sei k ein Grundkörper von Charakteristik $p > 0$, und $k \subset k'$ eine rein inseparable algebraische Körpererweiterung. Folgern Sie, dass für jedes Schema X die Projektion

$$f : X' = X \otimes_k k' = X \times_{\operatorname{Spec}(k)} \operatorname{Spec}(k') \longrightarrow X$$

ein Homöomorphismus ist, indem Sie die Fasern $f^{-1}(b)$ betrachten.

Abgabe: Bis Freitag, den 8. Dezember um 8:25 Uhr im Zettelkasten.