Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei k ein Grundkörper von Charakteristik $p \geq 0$, und X das Spektrum einer endlichen k-Algebra A. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Das Schema X is projektiv.

(ii) Wenn der Ring A reduziert und $p = 0$ ist, so gibt es sogar eine abgeschlossene Einbettung $X \subset \mathbb{P}^1$.

(iii) Letzter Aussage ist falsch in Charakteristik $p > 0$.

Aufgabe 2. Sei S ein graduierter Ring, M ein graduierter Modul, und $f, g \in S_+$ zwei homogene Elemente. Schreibe $m = \deg(f)$ und $n = \deg(g)$. Verifizieren Sie die Gleichheit von Lokalisierungen

$$(M_{(f)})_{g^m/f^n} = M_{(fg)}.$$

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper und $S = k[x, y, z]$ der Polynomring in drei Unbestimmten, versehen mit der Nichtstandard-Graduierung $\deg(x) = \deg(y) = 1$ und $\deg(z) = n$ für eine ganze Zahl $n \geq 1$. Das resultierende homogene Spektrum

$$\mathbb{P}(1, 1, n) = \mathrm{Proj}(S)$$

ist ein *gewichtet-projektiver* 2-*Raum*. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(1, 1, n)$ von den drei affinen offenen Teilmengen

$$U = D_+(x), \quad V = D_+(y) \quad \text{und} \quad W = D_+(z)$$

überdeckt wird, dass zwei davon isomorph zur projektiven Ebene $\mathbb{A}^2$ sind, und dass die dritte das Spektrum einer k-Algebra ist, die von $n+1$ Elementen erzeugt wird.

Aufgabe 4. Für welche graduierten Ringe $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ ist das homogene Spektrum $X = \mathrm{Proj}(S)$ leer?

Abgabe: Bis Freitag, den 17. November um 8:25 Uhr im Zettelkasten.