Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 17/18

Übungen zu algebraische Geometrie I

Blatt 3

Aufgabe 1. Sie X ein Schema, $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe, $s \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ ein globaler Schnitt, und

$$X_s = \{a \in X \mid s(a) \neq 0 \text{ in } \mathscr{L}_a / \mathfrak{m}_a \mathscr{L}_a\}.$$

Verifizieren Sie, dass dies eine offenen Teilmenge ist, und dass die Inklusionsabbildung $i : X_s \to X$ ein affiner Morphismus von Schemata ist.

Aufgabe 2. Sei $f : X \to Y$ ein affiner Morphismus von Schemata. Zeigen Sie, dass für jede quasikohärente Garbe $\mathscr{F}$ auf X die resultierende direkte Bildgarbe $f_*(\mathscr{F})$ quasikohärent auf Y ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe auf einem geringtem Raum X, und $U_i \subset X$, $i \in I$ eine offenen Überdeckung, für die es Isomorphismen $\varphi_i : \mathscr{O}_{U_i} \to \mathscr{L}|U_i$ gibt. Wir bezeichnen mit $e_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{L})$ die Bilder des lokalen Schnitts $1 \in \Gamma(U_i, \mathscr{O}_X)$ unter φ_i.

(i) Verifizieren Sie, dass $e_i|U = \alpha_{ij} \cdot e_j|U$ mit eindeutig bestimmten lokale Schnitte $\alpha_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathscr{O}_X^\times)$ auf den Überlappungen $U = U_{ij}$.

(ii) Rechnen Sie nach, dass diese auf den Überlappungen $V = U_{ijk}$ der Kozykelbedingung genügen:

$$\alpha_{jk}|V \cdot \alpha_{ij}|V = \alpha_{ik}|V.$$

Aufgabe 4. Sei X ein Schema, $\mathscr{E}$ eine lokal freie Garbe vom Rang $r \geq 0$, und

$$V = \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}^\bullet(\mathscr{E}^\vee)) \xrightarrow{f} X$$

das entsprechende Vektorbündel. Beweisen Sie, dass die Schnitte $s : X \to V$ bezüglich des Strukturmorphismus $f : V \to X$ genau den globalen Schnitten $\sigma \in \Gamma(X, \mathscr{E})$ ensprechen.

Abgabe: Bis Freitag, den 10. November um 8:25 Uhr im Zettelkasten.