Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei F ein Körper und $R \subset F$ ein lokaler Unterring. Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildung ein lokaler Homomorphismus ist genau dann, wenn der Ring R ein Körper ist.

Aufgabe 2. Sei $X = \operatorname{Spec}(R)$ das Spektrum eines lokalen Rings R. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) X ist nichtleer;

(ii) X ist irreduzibel;

(iii) X ist zusammenhängend;

(iv) X ist noethersch.

Aufgabe 3. Sei $R = k[T_1, T_2]$ der Polynomring in zwei Unbestimmten über einem Körper k. Wir betrachten das affine Schema $(X, \mathscr{O}_X) = (\operatorname{Spec} R, \widetilde{R})$. Berechnen Sie mit dem Garbenaxiom für die offene Teilmenge

$$U = D(T_1) \cup D(T_2)$$

den Ring der lokalen Schnitte $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$. Folgern Sie daraus, dass das Schema $(U, \mathscr{O}_X|U)$ kein affines Schema ist.

Aufgabe 4. Sei $(X, \mathscr{O}_X)$ ein lokal-geringter Raum. Zeigen Sie, dass es genau einen Morphismus

$$(f, \varphi) : (X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow (\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \widetilde{\mathbb{Z}})$$

in das affine Schema $(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \widetilde{\mathbb{Z}})$ gibt. Beschreiben Sie für jeden Punkt $x \in X$ das Bild $f(x) \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ mittels einer Eigenschaft des Restekörpers $\kappa(x)$.

Abgabe: Bis Freitag, den 16. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.