Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei R ein Ring, $S \subset R$ ein multiplikatives System und M ein R-Modul. Verifizieren Sie, dass die Relation

$$(s, a) \sim (s', a') \quad \iff \quad \exists\, t \in R \text{ mit } t(sa' - s'a) = 0$$

auf der Menge $S \times M$ eine Äquivalenzrelation ist, und dass Addition und Skalarmultiplikation

$$\frac{a}{r} + \frac{b}{s} = \frac{sa + rb}{rs}, \qquad f \cdot \frac{b}{s} = \frac{fb}{s}$$

auf der Lokalisierung $S^{-1}M$ wohldefiniert sind.

Aufgabe 2. Sei $R = \mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen. Wir betrachten die zyklische Gruppe

$$M = \mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$$

als R-Modul. Berechnen Sie die Lokalisierung M_f für die beiden ganzen Zahlen $f = 2$ und $f = 5$.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring und $f \in R$. Zeigen Sie, dass die R-Algebra R_f isomorph zu $R[T]/(fT - 1)$ ist.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und $S \subset R$ ein multiplikatives System. Wir bilden die Familie $\mathfrak{p}_\lambda \subset R$, $\lambda \in L$ der zu S disjunkten Primideale, und setzen $\tilde{S} = R \smallsetminus \bigcup \mathfrak{p}_\lambda$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Teilmenge $\tilde{S} \subset R$ ist ein multiplikatives System, welches S enthält.

(ii) Ist $a \in R$ Teiler eines Elements $s \in \tilde{S}$, so folgt bereits $a \in \tilde{S}$.

(iii) Die kanonische Abbildung

$$S^{-1}R \longrightarrow \tilde{S}^{-1}R, \quad \frac{f}{s} \longmapsto \frac{f}{s}$$

ist bijektiv.

Abgabe: Bis Freitag, den 2. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.