Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer
SS 17

Übungen zu Kommutative Algebra und algebraische Geometrie

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ zwei Ideale.

(i) Verifizieren Sie die Gleichheit sowie die Inklusion

$$\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} \supset \sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}.$$

(ii) Geben Sie mit $R = k[x, y]$ ein Beispiel dafür an, dass im allgemeinen

$$\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} \neq \sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}.$$

Aufgabe 2. Sei $\varphi : R \to A$ ein Homomorphismus von Ringen,

$$f : X = \operatorname{Spec}(A) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R) = Y$$

die induzierte stetige Abbildung, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $Z = V(\mathfrak{a})$ die resultierende abgeschlossene Menge in X.

(i) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Bildmenge $f(Z) \subset Y$ im allgemeinen nicht abgeschlossen ist.

(ii) Was ist das Radikalideal $\mathfrak{b} \subset R$ zur abgeschlossenen Menge $\overline{f(Z)} \subset Y$?

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $K \subset L$ eine endliche Galois-Erweiterung, mit Galois-Gruppe $G = \operatorname{Gal}(L/K)$. Schreiben Sie den Ring $R = L \otimes_K L$ als Produkt von Körpern und zeigen Sie, dass jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ ein Radikalideal ist. Benutzen Sie dabei, dass für gewisse $a \in L$ die konjugierten Elemente $\sigma(a) \in L$ eine K-Basis bilden.

Aufgabe 4. Sei X eine kompakte Mannigfaltigkeit und $R = \mathscr{C}(X)$ der Ring der stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass X in kanonischer Weise als Unterraum aller abgeschlossenen Punkte von $Y = \operatorname{Spec}(R)$ aufgefasst werden kann.

(ii) Folgern Sie, dass zwei kompakte Mannigfaltigkeiten X und X' homöomorph sind genau dann, wenn die Ringe $R = \mathscr{C}(X)$ und $R' = \mathscr{C}(X')$ isomorph sind.

Abgabe: Bis Freitag, den 12. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.