Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Dr. Saša Novaković

WS 16/17

Übungen zur Kategorientheorie

Blatt 6

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Für jeden R-Modul M ist die die natürliche Abbildung

$$\tau\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(M, \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(R, A))$$

ein Isomorphismus. Hier ist $\tau(f)(m)$ die Abbildung $r \mapsto f(rm)$.

Aufgabe 2. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ abelsche Kategorien. Zwei Funktoren $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ und $G\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ heißen *adjungiert*, falls es eine natürliche Bijektion

$$\tau\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(A), B) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(B))$$

gibt. Zeigen Sie: Seien $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ und $G\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ adjungiert und sei F zusätzlich exakt, so ist $G(I)$ injektives Objekt in $\mathcal{C}$, falls I injektives Objekt in $\mathcal{C}'$ ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Sei R ein Ring. Ist I injektive abelsche Gruppe, so ist $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(R, I)$ injektiver R-Modul.

Aufgabe 4. Sei $\varinjlim M_\alpha$ der direkte Limes aus der Vorlesung. Das duale Objekt $\varprojlim M_\alpha$ heißt *projektiver Limes*. Zeigen Sie: Falls $\Lambda = \{i, j, k\}$, mit $i \leqslant j$ und $i \leqslant k$, so ist $\varprojlim M_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$, das Faserprodukt $M_k \times_{M_i} M_j$.

Abgabe: Bis Dienstag, den 17. Januar im Zettelkasten.