Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 16/17

Übungen zur Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei $f \in k[x]$ ein normiertes Polynom vom Grad $n \geq 3$, und $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ die durch die Homogenisierung der Gleichung

$$y^2 = f(x)$$

gegebene Kurve. Zeigen Sie, dass der Schnitt $C \cap L$ mit der Geraden $L \subset \mathbb{P}^2(k)$ bei unendlich aus einem einzigen Punkt $a \in \mathbb{P}^2(k)$ mit Schnittmultiplizität $\mathrm{mult}_a(C, L) = n$ besteht, und bestimmen Sie den singulären Ort $\mathrm{Sing}(C)$.

Aufgabe 2. Seien $C, D \subset \mathbb{P}^2(k)$ Kurven ohne gemeinsame irreduzible Komponenten, zu quadratfreien homogenen Polynomen $f, g \in S$. Hierbei schreiben wir $S = k[x, y, z]$. Wir betrachten den graduierten Ring $\bar{S} = S/(f, g)$. Zeigen Sie, dass

$$\dim_k(\bar{S}_t) = \deg(C)\deg(D) \cdot t + c$$

für alle $t \gg 0$, wobei $c \in \mathbb{Z}$ eine Konstante ist.

Aufgabe 3. Sei $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ eine Kurve, mit irreduziblen Komponenten $C = C_1 \cup \ldots \cup C_r$.

(i) Verifizieren Sie, dass jeder Schnittpunkt $a \in C_i \cap C_j$, $i \neq j$ ein singulärer Punkt von C ist.

(ii) Zeigen Sie, dass jeder reguläre Punkt $b \in C_i$ auch ein regulärer Punkt von C ist.

(iii) Folgern Sie, dass die Menge $\mathrm{Sing}(C)$ der singulären Punkte endlich ist.

Aufgabe 4. Sei $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ die durch $z^2 = xy$ gegebene Quadrik, und

$$L_\lambda \subset \mathbb{P}^2(k), \quad \lambda \in L$$

die Familie aller Geraden, für welche $C \cap L_\lambda$ nur aus einem einzigen Punkt $u \in \mathbb{P}^2(k)$ besteht, demnach mit $\mathrm{mult}_a(C, L) = 2$. Zeigen Sie, dass in Charakteristik $p = 2$ all diese Geraden durch einen einzigen Punkt $v \in \mathbb{P}^2$ verlaufen.

Abgabe: Bis Freitag, den 16. Dezember um 8:25 Uhr im Zettelkasten.